le 18 Février 2010 UTBM MT12
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

Matrices et applications linéaires

1 Matrice d'une application linéaire.

A partir de maintenant, soit E et F, 2 espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de **dimensions finies respectives n et p munis de bases respectives $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$**.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application lineaire.

Soit $x \in E$ alors $x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + ... + x_n.e_n$ (écriture unique) et, dans la base $\mathcal{B}$, $x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Question 1.1 *Quelles sont les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{U}$?*

$f(x) = f(x_1.e_1 + x_2.e_2 + ... + x_n.e_n) = x_1.f(e_1) + x_2.f(e_2) + ... + x_n.f(e_n)$ que que soit $x \in E$ donc f est définie de façon unique par la donnée de $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$.

Mais $f(e_1) = a_{1,1}.u_1 + a_{2,1}.u_2 + ... + a_{p,1}.u_p$ (*i.e.* $f(e_1)_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ ... \\ a_{p,1} \end{pmatrix}$),

$f(e_2) = a_{1,2}.u_1 + a_{2,2}.u_2 + ... + a_{p,2}.u_p$ (*i.e.* $f(e_2)_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ ... \\ a_{p,2} \end{pmatrix}$),

...

$f(e_n) = a_{1,n}.u_1 + a_{2,n}.u_2 + ... + a_{p,n}.u_p$ (*i.e.* $f(e_1)_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ ... \\ a_{p,n} \end{pmatrix}$),

Donc
$f(x) = x_1(a_{1,1}u_1 + a_{2,1}u_2 + ... + a_{p,1}u_p) + x_2(a_{1,2}u_1 + a_{2,2}u_2 + ... + a_{p,2}u_p) + ... + x_n(a_{1,n}u_1 + a_{2,n}u_2 + ... + a_{p,n}u_p)$
$= (x_1a_{1,1} + x_2a_{1,2} + ... + x_na_{1,n}).u_1 + (x_1a_{2,1} + x_2a_{2,2} + ... + x_na_{2,n}).u_2 + ... + (x_1a_{p,1} + x_2a_{p,2} + ... + x_na_{p,n}).u_p$.

Donc $f(x)_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} x_1a_{1,1} + x_2a_{1,2} + ... + x_na_{1,n} \\ x_1a_{2,1} + x_2a_{2,2} + ... + x_na_{2,n} \\ ... \\ x_1a_{p,1} + x_2a_{p,2} + ... + x_na_{p,n} \end{pmatrix}$.

On remarque alors que $f(x)_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p,1} & a_{p,2} & ... & a_{p,n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Conclusion 1.2 *Étant choisies une base de E et une base de F, on a une correspondance bijective entre les matrices de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et les applications linéaires de E dans F.*

Définition 1.3 *Soient E, F $\mathbb{K}$-e.v. de bases respectives $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
On appelle **matrice de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{U}$**, *la matrice dont les colonnes sont les $f(e_i)_{\mathcal{U}}$:*

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{U}} = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{U}) := \left(\ f(e_1)_{\mathcal{U}} \mid f(e_2)_{\mathcal{U}} \mid ... \mid f(e_n)_{\mathcal{U}} \ \right) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

On a

$$\forall V \in E, f(V)_{\mathcal{U}} = M_{f,\mathcal{B},\mathcal{U}}.V_{\mathcal{B}}.$$

Exemples 1.4 *i) Soit* $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array}$
Soient $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ base de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{U} = \{1, X, X^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exo. : *Faire la même chose avec $\mathcal{B}' = \{1 + X, X + X^2, X^2 + X^3, X^3\}$ et $\mathcal{U}' = \{1 + X, X^2, X\}$.*

ii) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Soit* $\widehat{u} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge u \end{array}$.
Quelle est la matrice de $\widehat{u}$ dans les bases canoniques ?
Et dans $\mathcal{B} = \mathcal{U} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ *?*

Propriétés 1.4.1 *E, F, G $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dim. finies et de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$.*
i) Pour $f, g : E \longrightarrow F$ linéaires, $M_{f+g,\mathcal{B},\mathcal{U}} = M_{f,\mathcal{B},\mathcal{U}} + M_{g,\mathcal{B},\mathcal{U}}$,
ii) pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f : E \longrightarrow F$ linéaire, $M_{\lambda.f,\mathcal{B},\mathcal{U}} = \lambda.M_{f,\mathcal{B},\mathcal{U}}$,
iii) si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ linéaires alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est linéaire et $M_{g \circ f,\mathcal{B},\mathcal{V}} = M_{g,\mathcal{U},\mathcal{V}} \times M_{f,\mathcal{B},\mathcal{U}}$.
iv) pour $f : E \longrightarrow E$, $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = I \Longleftrightarrow f = id_E$.

Preuve en exo.

2 Isomorphismes et matrices.

On a vu que $F \simeq G \Longleftrightarrow \dim F = \dim G$.

Soient E, F des e.v. de dim. n, $f : E \longrightarrow F$ linéaires, $g : F \longrightarrow E$ On a vu que

$$f \circ g = Id \Longleftrightarrow M_f \times M_g = I_n.$$

On en déduit le

Théorème 2.1 *Soient E, F des e.v. de dim. n et de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et $f : E \longrightarrow F$ linéaire :*

$$f \text{ bijective} \Longleftrightarrow M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{ est inversible}$$

et, dans ce cas $M^{-1}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{f^{-1},\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

Définition 2.2 *(rang d'une matrice)*
Le rang d'une matrice *est le rang de l'application linéaire associée :*

$$rang(M) = rang(f_M) = \dim(Im(f_M)).$$

C'est le rang de la famille constituée des vecteurs colonnes.

Remarque 2.3 *pour A matrice,*

$$Rang(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0.$$

Corollaire 2.4 *$A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi $rang(A) = n$.*

Remarque 2.5 *On sait (voir TD de MT11) que $({}^tA)^{-1} ={}^t (A^{-1})$, donc*

$$A \text{ inversible} \Longleftrightarrow la\ famille\ constituée\ des\ vecteurs\ ligne\ de\ A\ est\ libre.$$

3 Matrice d'un endomorphisme et matrice de passage.

3.1 Cas d'un endomorphime.

$f : E \longrightarrow E$ endomorphisme.

Deux cas se présentent :

1^{er} cas : On prend la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.
$f : E \longrightarrow E$, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de E.

$$M_{f,\mathcal{B}} := M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} f(e_1)_{\mathcal{B}} & f(e_2)_{\mathcal{B}} & ... & f(e_n)_{\mathcal{B}} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

nous donne les coordonnées de l'image de x dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$:

$$f(x)_{\mathcal{B}} = M_{f,\mathcal{B}}.x_{\mathcal{B}}.$$

$2^{ème}$ cas : On prend deux bases différentes au départ ($\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$) et à l'arrivée ($\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$).
$f : E \longrightarrow E$.

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} f(e_1)_{\mathcal{B}'} & f(e_2)_{\mathcal{B}'} & ... & f(e_n)_{\mathcal{B}'} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

nous donne les coordonnées de l'image de x dans $\mathcal{B}'$ en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$:

$$f(x)_{\mathcal{B}'} = M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'}.x_{\mathcal{B}}.$$

Exemples 3.1 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ y+3z \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soient $\mathcal{B} = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$\mathcal{B}' = \{e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

On cherche $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

3.2 Changement de base.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim. finie n muni de 2 bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$.
Soit $V \in E$. On veut déterminer les coordonnées de V dans $\mathcal{B}'$ en fonction des coordonnées de V dans $\mathcal{B}$.

Exemples 3.2 *Prenons* $E = \mathbb{R}_2[X]$ *muni de 2 bases* $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ *et* $\mathcal{B}' = \{1+X, X, X+X^2\}$.

$(1+2X+3X^2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $(1+2X+3X^2)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

But : *trouver la matrice qui permet de passer d'une base à l'autre.*

Idée : chercher la matrice de l'application identité (linéaire) de E dans E avec au départ la base $\mathcal{B}$ et à l'arrivée la base $\mathcal{B}'$.
$\mathcal{M}_{id_E,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ nous donnera alors, pour $V \in E$, les coordonnées de $id_E(V) = V$ dans la base $\mathcal{B}'$ en fonction des coordonnées de V dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 3.3 *(matrice de passage)*
Soit E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim. n.Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, 2 bases de E.
On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$**, *la matrice $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$\forall V \in E, V_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.V_{\mathcal{B}}.$$

Donc

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} := \mathcal{M}_{id_E,\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \big(\ (e_1)_{\mathcal{B}'} \mid (e_2)_{\mathcal{B}'} \mid ... \mid (e_n)_{\mathcal{B}'}\ \big).$$

Remarque 3.4 *Le nom* **matrice de passage de $\mathcal{B}'$** *à $\mathcal{B}$ est justifié par le fait que :*

$$(e_1, e_2, ..., e_n) = (e'_1, e'_2, ..., e'_n).P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

Exercice 3.5 *Soit $E = \mathbb{R}^3$ avec sa base canonique. Soient $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.*
1) Trouver $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
2) Que constatons-nous ?

3.3 Matrices de passage et applications linéaires.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dim. finie respective $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Question : quelle est la relation entre $\mathcal{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ et $\mathcal{M}_{f,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$?

Soit $X \in E$, on a, par définition :
$f(X)_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}}.X_{\mathcal{B}}$,
$f(X)_{\mathcal{C}'} = \mathcal{M}_{f,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}.X_{\mathcal{B}'}$,
$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.X_{\mathcal{B}'}$,
$f(X)_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}.f(X)_{\mathcal{C}'}$,
Donc

$$\mathcal{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}.\mathcal{M}_{f,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}.P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Théorème 3.6 *Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie alors*

$$\mathcal{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}.\mathcal{M}_{f,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}.P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Exercice 3.7 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Supposons*

$$M_{f,\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

Solution : $M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.