le 6 Septembre 2010 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

$TD\ N^0 6$
Fonctions d'une variable complexe

Exercice 1 *Trouver le domaine sur lequel les fonctions suivantes sont holomorphes :*

$$f(z) = \frac{1}{z-1+2i},\ g(z) = \frac{1}{\bar{z}},\ h(z) = Re(z).$$

Exercice 2 *Trouver une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ telle que sa partie réelle soit $x^2 - y^2$.*

Exercice 3 *Soit $f(z) = \ln(z^2+1)$. Calculer $f(2+2i)$.*

Exercice 4 *Soit la fonction définie sur $\mathbb{C}$ définie par $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$. Montrer que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en 0 mais n'est pas holomorphe au voisinage de ce point.*

Exercice 5 *1) Quel est le domaine d'holomorphie de la fonction définie par $f(z) = e^{iz}$?*
2) Calculer $I_r = \int_{\Gamma_r} f(z)dz$ où Γ_r est le demi-cercle de centre 0 et re rayon r du demi-plan $\{z \in \mathbb{C}/im(z) > 0\}$ parcouru dans le sens direct.

Exercice 6 *1) Déterminer la série de Laurent en 0 de la fonction $g(z) = \frac{1}{z^4-3z^3+2z^2}$. Déterminer le domaine de convergence.*
2) En déduire, grâce au théorème des résidus, $I_1 = \int_{C(0,\frac{1}{2})} g(z)dz$ où $C(a,r)$ est le cercle de rayon r, de centre a parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.
3) Calculer $I_2 = \int_{C(1,2)} g(z)dz$

Exercice 7 *Calculer par la méthode des résidus, l'intégrale de Wallis :*

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(\theta)d\theta.$$