le 6 Septembre 2010 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

$TD\ N^0 1$

Intégrales impropres

Exercice 1 *Calculer*
(i) $\int_0^1 t^{-1/3}dt$,
(ii) $\int_1^2 \frac{dt}{t\ln t}$ *et* $\int_2^\infty \frac{dt}{t\ln t}$,
(iii) $\int_0^\infty \frac{t+1}{e^t}dt$ $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$,

Exercice 2 *Etudier la convergence de* $\int_1^\infty t^\alpha e^{-t}dt$, $\alpha \geq 0$.

Exercice 3 *Etudier la convergence des intégrales :*
$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{\ln(t)}dt \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{t}{\ln(t)}dt \quad I_3 = \int_0^{+\infty}(-2x+3)e^{-2x}dx \quad I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{x-2}{x^4+x^2}dx$
$I_5 = \int_0^1 \ln(x)dx \quad I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{\ln(x)} \quad I_7 = \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{1-t}}dt \quad I_8 = \int_0^1 \frac{e^x-1}{x\sqrt{x}}dx \quad I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ln(\tan(t))dt$

Exercice 4 *Etudier l'intégrabilité de* $t \mapsto f_n(t) = \ln(t)^n$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$ *sur* $]0,+\infty[$ $]0,1[$ *ou* $]0,a]$ *suivant les cas.*

Exercice 5 *Etudier la nature de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{\ln(x)}}dx$ *selon les valeurs de* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 *Soient 2 polynômes* P *et* Q. *Etudier l'intégrabilité sur* $]0,1]$ *de* $P(t).Q(\ln(t))$.

Exercice 7 *Etudier l'intégrabilité sur* $]1,+\infty[$ *de* $\frac{\ln(t)}{t(1-t^2)}$.

Exercice 8 *Etudier l'intégrabilité sur* $]0,a]$ $(0 < a < 1)$ *et* $[b,+\infty[$ $(1 < b)$ *de* $\frac{\ln|1-t|}{t^{\frac{5}{2}}} - \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice 9 *Préciser le lien (implications) entre les assertions suivantes :*
i) f *intégrable sur* $[a,+\infty[$,
ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Prouver ou illustrer par un contre exemple.

Exercice 10 *Etudier la convergence de l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+x^3} dx$.

Exercice 11 *Etudier la convergence de l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

Exercice 12 *Etudier, suivant les valeurs de* $\alpha > 0$, *la convergence simple de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$.

Exercice 13 *Montrer que* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ *est convergente. L'est-elle absolument ?*

Exercice 14 *Soit la fonction* Γ *(fonction gamma) définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

a) Déterminer les valeurs de x *pour lesquels* $\Gamma(x)$ *converge.*

b) Déterminer une relation entre $\Gamma(x)$ *et* $\Gamma(x-1)$, *pour* $x > 1$. *Calculer* $\Gamma(1)$ *et en déduire les valeurs de la fonction Gamma sur* $\mathbb{N}^*$.

c) Utiliser la fonction Gamma pour calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x^3.e^{-x} dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x} dx.$$

Exercice 15 *Calculer, grâce au changement de variables* $y = \frac{1}{x}$, $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

Exercice 16 *Soit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin(x) dx$.

a. Déterminer une relation entre u_{n+1} *et* u_n. *En déduire la nature de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Exprimer u_n *en fonction de* u_0 *et* n.

c. Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

et la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x) dx.$$

Cette intégrale est-elle absolument convergence ?

Exercice 17 *Soit la fonction* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f *et montrer qu'elle est paire.*

2. Calculer $f(1)$ *à l'aide du changement de variable* $u = \frac{1}{t}$.

En déduire une forme explicite de f.

3. Etudier f *et tracer sa courbe représentative.*