le 6 Septembre 2010 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

$TD\ N^0 2$

Séries numériques

Exercice 1 *Etudier la convergence des séries de terme général*

$$u_n = 2^{-\frac{1}{n}} \quad v_n = \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n^2}) \quad w_n = \frac{1}{\ln(n)^n} \quad x_n = e^{-\sqrt{n}} \quad y_n = \frac{n!}{n^n} \quad z_n = (\ln(n))^{-\ln(n)} \quad t_n = (1+\sqrt{n})^{-n}.$$

Exercice 2 *Nature de la série de terme général*

$$u_n = \frac{5}{\sqrt{n} + 7.(-1)^n}.$$

Exercice 3 *Soit $a \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de terme général*

$$u_n = \frac{1}{(2n)!}\prod_{k=1}^{n}(a+k).$$

Exercice 4 *Etudier la série de terme général ($n \in \mathbb{N}$) :*

1. $U_n = \frac{2^n}{n^2}$,
2. $U_n = \frac{2}{n^n}$,
3. $U_n = \frac{2^n}{n!}$,
4. $U_n = \frac{n^3}{5^n+n}$,
5. $U_n = \ln(\frac{1+\tan\frac{1}{n^2}}{1-\tan\frac{1}{n^2}})$,

Exercice 5 *Discuter, suivant α, la nature des séries de terme général :*

1. $U_n = \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
2. $U_n = \frac{2^n}{n^2}\sin^{2n}\alpha$ *avec* $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$,

Exercice 6 *Montrer que la série de terme $U_n = 3^{\frac{1}{2n-1}} - 3^{\frac{1}{2n+1}}$ est convergente et calculer sa somme ($n \geq 1$).*

Exercice 7 *Montrer que la série de terme* $U_n = \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ *est convergente et calculer sa somme* $(n \geq 1)$.

Exercice 8 *Déterminer la nature des séries de terme général :*

1. $(\frac{n+3}{2n+1})^{n \ln n}$,
2. $\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3 - 2\sqrt{n} + 3 \ln n}$,
3. $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$,
4. $\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$,
5. $\frac{k^n}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 *Déterminer un entier n tel que*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ ... \ + \frac{1}{\sqrt{n}} > 10.$$

Exercice 10 1. *calculer la dérivée de la fonction* $\ln(\ln x)$,

2. *En déduire la nature de la série de terme général* $U_n = \frac{1}{n \ln(n)(\ln(\ln(n)))^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Exercice 11 *Déterminer la nature de la série de terme général* $(n \in \mathbb{N})$ *:*

1. $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - n^3}$,
2. $U_n = \frac{\sin n}{n^n}$,
3. $U_n = (-1)^n \sin \frac{\sqrt{n+1}}{n}$.

Exercice 12 *Etudier la série de terme général*

$$U_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{1 + n}.$$

Exercice 13 *Etudier la série de terme général*

$$U_n = \ln(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}), \ \alpha \geq \frac{1}{4}$$

Exercice 14 *Déterminer un équivalent* v_n *de* u_n *quand n tend vers l'infini avec*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

Etudier la convergence de $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$. *Conclusion.*

Exercice 15 *A l'aide des développements limités, étudier la convergence de la série de terme général :*

$$u_n = \frac{(-1)^n.\sqrt{n}.\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n+(-1)^n}$$

Exercice 16 *Déterminer, pour les séries suivantes, une majoration de l'erreur commise en remplaçant la somme de la série par la somme de ses n premiers termes. Si possible, préciser s'il s'agit d'une valeur par excés ou par défaut.*

$$S_1 = \sum \frac{(-1)^n}{n}, \quad S_2 = \sum \frac{1}{n!}, \quad S_3 = \sum \frac{1}{n^2}, \quad S_4 = \sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

Exercice 17 *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, positifs ou nuls, décroissante et de limite 0. Etudier la convergence des 2 séries $\sum a_n \cos(nx)$ et $\sum a_n \sin(nx)$.*

Exercice 18 *Etudier la convergence des séries*

$$S_1 = \sum \frac{n(2+i)^n}{(2^n)}, \quad S_2 = \sum \frac{n(2-i)^n}{3^n}, \quad S_3 = \sum (\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i})^n, \quad S_4 = \sum \frac{i^n}{n}, \quad S_5 = \sum \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$$

Exercices supplémentaires.

Exercice 19 *(difficile)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier, en fonction de α, la nature de la série

$$\sum (\frac{n-1}{n+1})^{n^\alpha}.$$

Exercice 20 *A l'aide des développements limités, étudier la convergence de la série de terme général :*

$$u_n = e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$$

Exercice 21 *A l'aide des développements limités, étudier la convergence de la série de terme général :*

$$v_n = \ln(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}).$$

Exercice 22 *Etudier la série de terme général*

$$\begin{cases} U_{2n} = \frac{1}{2n} \\ U_{2n+1} = \frac{2}{n+1} \end{cases}$$