le 6 Septembre 2010 UTBM MT26

Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

$TD\ N^0 3$

Suites et séries de fonctions

Exercice 1 *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme, sur leur ensemble de définition des suites de fonction suivantes :*

a) $U_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ U_n(x) = \frac{1}{nx+1}$,
b) $U_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ U_n(x) = \frac{x}{nx+1}$,
c) $U_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ U_n(x) = n^2 x e^{-nx}$,
d) $U_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ U_n(x) = \cos(\frac{1}{2^n}) + \frac{\sin(\frac{x}{n})}{n}$.

Exercice 2 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de terme général défini sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ nx & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & si\ x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

a) Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ *vers une fonction* f. *Représenter graphiquement* f_1, f_2, f_3, f.
b) Que peut-on en déduire ?
c) que se passe-t-il si on se restreint à $]a, +\infty[$ $(a > 0)$, $[-52, -41]$, $]0, +\infty[$.

Exercice 3 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de terme général défini sur* $[0, +\infty[$ *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0, 2n\pi] \cup [3n\pi, +\infty[\\ \frac{|\sin(x)|}{n} & sinon \end{cases}$$

a) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_n$ *vers une fonction* f *que l'on déterminera.*
b) Calculer, si possible $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ *et* $I = \int_0^{+\infty} f(t)dt$.
c) Même questions avec

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0, 2n\pi] \cup [(2n+1)\pi, +\infty[\\ \sin(x) & sinon \end{cases}$$

Exercice 4 *1) Calculer l'intégrale* $I_m = \int_0^1 f_m(x)dx$ *où* $f_m(x) = \frac{2^m x}{1+m2^m x^2}$, $(m \in \mathbb{N})$.
2) Calculer

$$\lim_{m\to\infty} I_m = I$$

3) Calculer

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x),\ \forall x \in [0,1].$$

4) Que peut-on en déduire sur la convergence de $(f_m)_m$ *vers* f *?*

Exercice 5 *Montrer que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$$

est convergente mais non uniformément convergente sur $[0, 2[$.

Exercice 6 *1) Montrer que la série de fonctions de terme général*

$$U_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ U_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n^2+1}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que $S = \sum U_n$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *Domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^3}.$$

Exercice 8 *a) Etudier la convergence simple, uniforme, normale de* $\sum f_n$ *avec*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \end{array}$$

b) Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *sur l'intervalle de convergence. Montrer que*

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = +\infty.$$