le 3 Janvier 2012 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

TD N^{0}4
Sur les séries de Fourier

Exercice 1 *Déterminer le domaine de convergence et la somme de la série de terme général :*

$$u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{a^n} + \frac{\sin(nx)}{b^n}, a > 1, b > 1.$$

Exercice 2 *Développer en série de Fourier la fonction de période* 2π *:*

$$f(x) = x, \ \forall x \in]-\pi, \pi[.$$

Exercice 3 *Développer en série de Fourier la fonction de période* π *:*

$$f(x) = x, \ \forall x \in]0, \pi[.$$

Exercice 4
1. *Développer en série de Fourier la fonction* f*, paire,* 2π*-périodique égale à* $\pi - x$ *pour* $0 \leq x \leq \pi$.
2. *La série obtenue converge-t-elle simplement vers* f *?*
3. *La série obtenue converge-t-elle uniformément sur* $[0, 2\pi]$ *?*
4. *Déduire du développement de* f*, la valeur de* $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Exercice 5 *Développer en série de Fourier la fonction* $f(x) = \frac{\pi}{4}$ *pour* $0 < x < \pi$*, impaire, de période* 2π *et en déduire la somme* $S = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Exercice 6 *On appelle courant redressé un courant de la forme :*

$$\begin{cases} I(\theta) = I_m \sin\theta & \textit{pour } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ I(\theta) = 0 & \textit{pour } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

où $I_m \in \mathbb{R}^*$.
Quel est le développement en série de Fourier de $I(\theta)$ *?*

Exercice 7 *Soit f, la fonction paire, 2π-périodique telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = (\pi - x)^2$.*

1. *Donner le développement en série de Fourier de f,*
2. *En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$*

Exercice 8 *On considère la fonction réelle $f(x)$ de la variable réelle x de période 2π qui pour $-\pi \leq x \leq \pi$ prend la valeur $x^2 - \pi^2$.*

1. *Calculer sa série de Fourier. Etudier sa convergence.*
2. *En déduire les valeurs des sommes des séries convergentes :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

3. *Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.*

Exercice 9 *Développer en série de Fourier la fonction (définie sur $\mathbb{R}$) $\phi(x) = \cos(ax)$ sur $[-\pi, \pi[$ avec $0 < a < 1$, 2π-périodique.*

Exercice 10

1. *Développer en série de Fourier la fonction $f(x)$, impaire, de période 2π égale à $\pi - x$ pour $0 < x < \pi$,*
2. *en déduire la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.*

Exercice 11 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique, impaire, telle que :*

$$\begin{cases} \forall t \in]0, \pi[, & f(t) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{Z}, & f(n\pi) = 0 \end{cases}$$

1) Développer f en série de Fourier.
2) Quelle est la convergence de cette série ?
3) En déduire la somme

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}.$$

Exercice 12 *Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que :*

$$\forall t \in [-\pi, \pi], f_\alpha(t) = \cos(\alpha t).$$

1) Représenter f_α.
2) Développer f en série de Fourier.
3) quelle est la convergence de cette série ?
4) En déduire $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - cotan(x) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1} x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$$

Exercice 13 *Soit f, la fonction 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f(x) = e^x$.*

a) Déterminer le développement **complexe** *en série de Fourier de f.*

b) Dériver $F(x) = (\alpha\cos(nx) + \beta\sin(nx))e^x$ et en déduire des primitives de $x \mapsto e^x\cos(nx)$ et $x \mapsto e^x\sin(nx)$.

c) Déterminer les coefficients de Fourier réels de f.

Exercice 14 *Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{3})|$ et $g(x) = |\sin(x)|$.*

a) Tracer les courbes représentatives de f et g.

b) Quel est le développement de Fourier de g ?

c) En déduire celui de f. Quels est son développement complexe ?

d) f et g sont-elles égales à leur développement de Fourier ?

e) Calculer $S_1 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}$ et $S_2 = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

f) Déterminer une suite $(u_n)_n$ réelle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| = \sum_{n\geq 1} u_n \sin^2(nt).$$