le 3 Janvier 2012 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

$TD\ N^0 5$
Sur les séries entières

Exercice 1 *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes (et regarder au bord) :*

1. $U_n(x) = n.x^n$,
2. $U_n(x) = \frac{1}{n^n}.x^n$,
3. $U_n(x) = \frac{n!}{n^n}.x^n$,
4. $U_n(x) = x^n \ln n$,
5. $U_n(x) = (\frac{nx}{n+1})^n$,
6. $U_n(x) = (\frac{1}{n!} + \frac{1}{n})x^n$.

Exercice 2 *On considère la suite*

$$U_n = \sin U_{n-1} \text{ avec } 0 < U_0 < \frac{\pi}{2}.$$

1. *Calculer la limite de cette suite quand n tend vers l'infini.*
2. *Déterminer l'intervalle de convergence de la série de terme général*

$$V_n = U_n x^n.$$

Exercice 3 *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes (et regarder au bord) :*

1. $\sum_{n\geq 0} a_n.x^n$ *avec* $a_n = 1$ *si n pair et* $a_n = \frac{1}{n}$ *si n est impair,*
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{1+n^{n-2}}{n^n} x^n$, $\sum_{n\geq 2} -\frac{1}{n^2} x^n$ *et la série dont le terme général est la somme de celui des deux précédentes.*

Exercice 4 *En utilisant uniquement le résultat suivant*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ \forall x \in]-1, 1[$$

et les résultats vus en cours sur les séries entières, trouver le développement en série entière des fonctions suivantes (préciser leur rayon de convergence) :

1. $\frac{1}{1-x^3}$,
2. $\frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$,
3. $x \ln(1 - x^3)$.

Exercice 5 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \arctan(\frac{1-x^4}{1+x^4})$.

1. *Déterminer le développement en série entière de* f *au voisinage de 0 sur un intervalle de convergence à préciser.*
2. *Retrouver le rayon de convergence de la série obtenue.*

*(***Rappel :** $\frac{\partial}{\partial x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$.*)*

Exercice 6 *Trouver le domaine de convergence et la somme des séries :*

1. $U_n(x) = 2x^n, \ n \geq 3$,
2. $U_n(x) = x^n \cosh na, \ a > 0.$,

Exercice 7 *Quels sont les rayons de convergence des séries entières*

1. $U_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$,
2. $V_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n(n+1)}$?

Calculer leurs sommes $U(x)$ *et* $V(x)$ $(n \geq 1)$.

Exercice 8 *Déterminer les fonctions de développement en série entière :*

i) $f_1(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$,
ii) $f_2(x) = \sum_{n\geq 1} (2n-1) x^{2n-2}$,
iii) $f_3(x) = \sum_{n\geq 1} n(n+1) x^{n-1}$.

Exercice 9 *Calculer les sommes, en précisant le domaine de convergence de :*

i) $f_1(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{x^n}$,
ii) $f_2(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$,
iii) $f_3(x) = \sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} x^n$.

Exercice 10 *Trouver les solutions développables en série entière de l'equation différentielle :*

$$xy'' + y = 0.$$

A-t-on toutes les solutions ?

Exercice 11 *Trouver les solutions développables en série entière de l'equation différentielle :*

$$xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0.$$

Reconnaître ces solutions. A-t-on toutes les solutions ?

Exercice 12 *Trouver les solutions développables en série entière de l'equation différentielle :*

$$x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1.$$

Reconnaître les solutions. A-t-on toutes les solutions ?

Exercice 13 *Déterminer le développement en série entière des fonctions :*

$$f_1(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt \quad f_2(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

Exercice 14 *Calculer sous forme de série l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-x})dx$ *après en avoir montré la convergence.*

En déduire la valeur de l'intégrale.