le 13 Décembre 2009 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

Fonctions d'une variable complexe

1 Généralités.

Définition 1.1 *On appelle* **fonction d'une variable complexe** *une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f \subset \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & Z = f(z) \end{array}$$

Exemples 1.2 *i) $\sum z^n$ est une fonction complexe définie sur $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Elle vérifie sur cet ouvert $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$. $\frac{1}{1-z}$ est une fonction complexe sur $\mathbb{C} - \{1\}$.*

ii) $\sum \frac{z^n}{n!} =: e^z$ est une fonction complexe définie sur $\mathbb{C}$.

iii) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ est une fonction complexe définie sur $\mathbb{C} - \{i, -i\}$. Elle vérifie $\forall z \in D(0,1), f(z) = \sum (-1)^n.z^{2n+1}$.

Exercice 1.3
Soit l'application f définie par $f(z) = \frac{z-4}{z-1}$.

1) Calculer $f(i.\sqrt{2})$. Déterminer sa partie réelle et imaginaire.

2) Démontrer que f admet deux points invariants a et b (On notera a celui de partie réelle positive).

3) Donner une interprétation géométrique de $|z-4|$, $|z-1|$ et $|f(z)|$.
En déduire l'ensemble D des points z tels que $|f(z)| = 1$.

4) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = X + iY$ avec x, y, X, Y réels.

a - Déterminer X et Y en fonction de x, y.

b - Déterminer l'ensemble E des points z tels que $f(z)$ soit réel.

c - Déterminer l'ensemble F des points z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

Définition 1.4 *Soit f une fonction complexe définie sur $\mathcal{D}$. Soit $z_0 \in \bar{\mathcal{D}}$. On dit que f admet une limite l en z_0 ssi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall z \in \mathcal{D}(|z - z_0| < \alpha \Longrightarrow |f(z) - l| < \epsilon).$$

Ce qui équivaut à

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = Re(l) \text{ et } \lim_{z \to z_0} Q(z) = Im(l)$$

où $f(z) = P(z) + iQ(z)$.

Définition 1.5 *Soit f une fonction complexe définie sur $\mathcal{D}$. Soit $z_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue en z_0 ssi*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Remarque 1.6 *Les propriétés de la limite et de la continuité sont les mêmes que pour les fonctions réelles.*

2 Fonctions holomorphes.

Définition 2.1 *Soit f une fonction complexe définie sur $\mathcal{D}$.Soit $z_0 \in \mathcal{D}$.*
f est dite **dérivable en z_0** *ssi $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite quand z tend vers z_0. Cette limite est appelée* **dérivée de f en z_0** *et notée $f'(z_0)$.*

Soit $U \subset \mathbb{C}$, U ouvert, on dit que f est **holomorphe sur U** *si f est dérivable en tout point de U.*

Remarque 2.2 *1) La dérivabilité complexe est linéaire.*

2) On montre de la même façon que pour les fonctions réelles,

$$(uv)' = u'v + uv' \;,\; (\frac{1}{u})' = \frac{u'}{u^2} \text{ et } u \circ v = v'.u' \circ v.$$

Conditions de Cauchy.

Proposition 2.3 *Soit f une fonction complexe. Si $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + i.Q(x,t)$ est dérivable en $z_0 = x_0 + i.y_0$ alors*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & = & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) & = & -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

et

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i.\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i.\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Preuve.
Supposons f dérivable en z_0. On a

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0).(f'(z_0) + \epsilon(z))$$

donc $P(x,y) - P(x_0,y_0) = (x - x_0)(A + \alpha(z)) - (y - y_0)(B + \beta(z))$ et $Q(x,y) - Q(x_0,y_0) = (y - y_0)(B + \beta(z)) + (y - y_0)(B + \beta(z))$ où $f'(z_0) = A + iB$ et $\epsilon = \alpha + i\beta$.
En posant alors $y = y_0$ (dérivée suivant l'axe des x), puis $x = x_0$ (dérivée suivant l'axe des y), on obtient $A = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$ et $B = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)$.
CQFD

Le résultat précédent admet la réciproque :

Proposition 2.4 *Soit f une fonction complexe ($f(z) = P(x,y) + i.Q(x,y)$). Si il existe U ouvert contenant $z_0 = x_0 + iy_0$ tel que P et Q sont $\mathcal{C}^1$ sur U et*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & = & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) & = & -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

Alors $f(z)$ est dérivable en z_0.

Preuve.
Théorème des accroissements finis autour de (x_0,y_0) appliqué aux deux fonctions P et Q, puis passage à la limite.
CQFD

Ce qui nous donne le

Théorème 2.5 *(Conditions de Cauchy)*
Soit f une fonction complexe. $f(z) = f(x + iy) = P(x,y) + i.Q(x,y)$ est holomorphe sur U **ouvert** *si et seulement si P, Q $\mathcal{C}^1$ sur U et*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} & = & \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & = & -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Preuve.
Provient des 2 propositions ci-dessus.
CQFD

Exemples 2.6 *$f(z) = \frac{1}{z}$,$g(z) = x + y - 1 + i(x - y + 2)$,$h(z) = y^2 - x^2 + i(y^2 - 2x)$,$k(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$.*

3 Fonctions analytiques.

Définition 3.1 *Soit f une fonction complexe définie sur un* **ouvert** *U.*
On dit que f est **analytique sur U** *ssi en tout point $z \in U$, f est développable en série entière sur un disque $D(z,r)$ ($r > 0$).*

Remarque 3.2 *Une fonction analytique sur U (***ouvert***) est holomorphe sur U (ainsi que toutes ces dérivées successives).*

Exemples 3.3 *i) $\frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{R}^*$.*
ii) Toute série entière de rayon de convergence non nul définit sur son disque de convergence (ouvert) une fonction analytique. Ce n'est pas trivial, car une série entière est à priori un développement au voisinage d'un seul point.
Preuve.
1- dans le cas où $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a une limite en $+\infty$.
$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ convergeant en z_0. Montrons que f admet un développement en série entière en z_0 :
$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z_0-(z_0-z)^n) = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k}.(z_0-z)^k = \sum_{m=0}^{+\infty}(\sum_{p=m}^{+\infty} a_p.C_p^m.z_0^{p-m}).(z_0-z)^m$ avec $\sum_{p=m}^{+\infty} a_p.C_p^m.z_0^{p-m}$ qui converge puisque $\frac{a_{p+1}.C_{p+1}^m}{a_p.C_p^m} \sim \frac{a_{p+1}}{a_p}$.

2- Dans le cas général, majorer $\left|\sum_{p=m}^{+\infty} a_p.C_p^m.z_0^{p-m}\right|$.
CQFD

Théorème 3.4 *Soit f une fonction complexe définie sur un* **ouvert** *U.*

$$f \text{ holomorphe sur } U \Longleftrightarrow f \text{ analytique sur } U.$$

Preuve.
Admis
CQFD

Zéros isolés.

Proposition 3.5 *Soit f une fonction analytique sur U (ouvert).*
Si $f(z_0) = 0$ et $\forall r > 0, \exists z \in D(z_0,r)/f(z) \neq 0$ alors z_0 est un zéro isolé (i.e. $\exists r > 0, \forall z \in D(z_0,r) - \{z_0\}, f(z) \neq 0$).

Preuve.
Sur $D(z_0,r)$, on a $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k. \sum_{n\geq 0} a_{n+k}(z-z_0)^n$ avec $a_k \neq 0$ sinon la fonction serait nulle sur le disque (k est alors la **multiplicité** du 0 de f).
Or $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+k}(z-z_0)^n$ est continue donc $\exists r' > 0/\forall z \in D(z_0,r'), g(z) \neq 0$ donc $\forall z \in D(z_0,r') - \{z_0\}, f(z) = (z-z_0)^k.g(z) \neq 0$.
CQFD

Proposition 3.6 *(zéros isolés)*
Soit f une fonction analytique sur U (ouvert connexe = "U ne peut pas s'écrire comme la réunion de deux ouverts non-vides disjoints").
Si f n'est pas la fonction nulle sur U alors tous ses 0 sont isolés (i.e. si $f(z_0) = 0$ alors $\exists r > 0, \forall z \in D(z_0, r) - \{z_0\}, f(z) \neq 0$).

Preuve.
Soit f une fonction analytique non nulle sur un ouvert U s'annulant en z_0.
Supposons que $\exists r > 0, \forall z \in D(z_0, r), f(z) = 0$. Soit $V \subset U$ "le plus grand ouvert connexe contenant z_0 tel que $\forall z \in V, f(z) = 0$". Si $V \neq U$ alors, $\exists z_1 \in U/V$, avec $z_1 \in \overline{V}$. Alors $\forall r > 0, \exists z \in D(z_1, r)/f(z) \neq 0$. Donc d'aprés la proposition précédente, ce zéro serait isolé. Ce qui est contradictoire puisque $\forall r > 0, D(z_1, r) \cap V \neq \emptyset$.
CQFD

4 Le logarithme complexe.

Soit $z \in \mathbb{C}$. A quelle condition existe-t-il $Z \in \mathbb{C}$ tel que $z = e^Z$?

Si $z = e^Z = e^{Re(Z)+i.Im(Z)} = e^{Re(Z)}.e^{i.Im(Z)}$ donc $|z| = e^{Re(Z)} \iff Re(Z) = \ln|z|$ et $\arg(z) = Im(Z)\ (2\pi)$.
On peut donc définir

Définition 4.1 *(logarithme complexe)*
On définit le **logarithme complexe** $\ln : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *par*

$$\ln(z) = Z \text{ avec } \begin{cases} Re(Z) & = & \ln|z| \\ Im(Z) & = & \arg(z) \in]-\pi, \pi] \end{cases}$$

Remarque 4.2
i) Le logarithme complexe est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur $B := \{z \in \mathbb{C}, -\pi < Im(z) \leq \pi\}$.
ii) La fonction réciproque de $\ln$ est $\exp : B \longrightarrow \mathbb{C}^*$.
iii) Pour $z, \alpha \in \mathbb{C}$ ($z \neq 0$), on définit $z^\alpha := e^{\alpha.\ln(z)}$.

Exemples 4.3 *Calculer $ln(z.\bar{z} + e^z + 1)$ avec $z = 1 + i\frac{\pi}{4}$.*

5 Introduction au théorème des résidus.

5.1 Intégrale d'une fonction complexe sur un chemin $\mathcal{C}^1$.

Définition 5.1 *Un* **chemin continument dérivable (ou $\mathcal{C}^1$)** *(par morceaux) est une application continue $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable à dérivée continue (par morceaux).*
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on parle de **chemin fermé** *ou* **lacet**.

Définition 5.2 *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable complexe et $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin continuement dérivable. On définit l'intégrale de f sur γ par :*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt.$$

Si γ est fermé, on utilise parfois la notation $\oint_\gamma f(z)dz$.

Exemples 5.3 *1) Calculer $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens indirect.*
2) Calculer $\int_{\gamma_1 \cup \gamma 2} zdz$ où γ_1 est le demi cercle de centre 2 et de rayon 1 dans le demi-plan supérieur parcouru dans le sens direct et γ_2 est le segment $[1, 3]$ parcouru dans le sens croissant.

5.2 Série de Laurent.

Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert $D(z_0, R)$ sauf eventuellement en z_0 alors f s'écrit de façon unique sur U :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z - z_0)^n.$$

On appelle alors $Res(f, z_k) = a_{-1}$ le résidu de f en z_k.

Calcul du résidu de f en z_k.

Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert $D(z_0, R)$ sauf eventuellement en z_0 alors

$$Res(f, z_k) = \frac{1}{2\pi.i} \int_{C(z_0,r)} f(z)dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r.e^{it}).re^{-it}dt \ (0 < r < R).$$

Remarque 5.4 *Dans le cas d'un pôle a d'ordre 1 de f, le résidu de f en a est*

$$Res(f, a) = \lim_{z \to a}(z - a)f(z).$$

5.3 théorème des résidus.

Théorème 5.5 *(Enoncé simplifié du théorème des résidus)*
Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre finis de points (z_1, ...,$z_n \in \mathbb{C}$).
Soit Γ un lacet fermé, sans point double, de $\mathbb{C} - \{z_1, ..., z_n\}$.
On a alors

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i. \sum_{k=1}^{n} I_k^\Gamma.Res(f, z_k).$$

avec $I_k^\Gamma = +1$ si le lacet entour z_k et est parcouru dans le sens direct (sens inverse des aiguille d'une montre),$I_k^\Gamma = -1$ si le lacet entour z_k et est parcouru dans le sens indirect, $I_k^\Gamma = 0$ sinon.

Exemples 5.6 *Calculer $I = \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2(t)}dt$.*

Réponse :
En posant $\theta = 2t$ *et en utilisant* $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$, *on obtient*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \cos(\theta)} d\theta.$$

On pose ensuite $z = e^{i\theta}$ ($d\theta = \frac{dz}{iz}$).
D'où $I = \int_C \frac{2i}{z^2 - 6z + 1} dz$ *où* C *est le cercle unité parcouru dans le sens direct.*
Le seul pôle de $\frac{2i}{z^2-6z+1}$ *dans* C *est* $3 - 2\sqrt{2}$.
Donc $I = 2i\pi.Res(\frac{2i}{z^2-6z+1}, 3 - 2\sqrt{2}) = \frac{-4\pi}{P'(3-2\sqrt{2})}$ *avec* $P(z) = z^2 - 6z + 1$.
D'où $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.