le 7 Octobre 2010 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

Les intégrales généralisées

1 Définitions-propriétés

Définition 1.1
i) Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continue, telle que* $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$.
On dit que $\int_a^b f(x)dx$ *est* **convergente** *ssi* $\int_a^t f(x)dx$ *converge lorsque* t *tend vers* b^-.
On note alors $\int_a^b f(x)dx := \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$.

ii) Soit $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue, telle que* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.
On dit que $\int_a^b f(x)dx$ *est* **convergente** *ssi* $\int_t^b f(x)dx$ *converge lorsque* t *tend vers* a^+.
On note alors $\int_a^b f(x)dx := \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$.

iii) Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continue.*
On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *est* **convergente** *ssi* $\int_a^t f(x)dx$ *converge lorsque* t *tend vers* $+\infty$.
On note alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$.

iv) Soit $f : [-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue.*
On dit que $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *est* **convergente** *ssi* $\int_t^b f(x)dx$ *converge lorsque* t *tend vers* $-\infty$.
On note alors $\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$.

Exemples 1.2 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+(\ln(x))^2)}dx$ *et* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx$.

Remarque 1.3 ATTENTION !
Si une intégrale est plusieurs fois impropre, elle converge si **chacune** *des limites convergent.*
i.e. Si $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *alors*

$$\int_a^b f(x)dx \text{ converge} \Longleftrightarrow \text{pour } c \in]a, b[,\ \int_a^c f(x)dx \textbf{ et } \int_c^b f(x)dx \text{ converge.}$$

Ex. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3dx$.

Remarque 1.4 *Si* f *est prolongeable par continuité au point problématique, on est ramené à une intégrale de Riemann.*

Exemple : $I = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx.$

Remarque 1.5 *ATTENTION !*
Il n'y a pas de lien général entre la limite de f au point problématique et la convergence de l'intégrale.

2 Etude d'intégrales généralisées par comparaison.

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue ($b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $\forall x \in [a, b[, 0 \leq f(x) \leq g(x)$).
On a alors $\forall t \in [a, b[, 0 \leq \int_a^t f(x)dx \leq \int_a^t g(x)dx$.
Mais $t \mapsto \int_a^t f(x)dx$ est une fonction croissante car sa dérivée est positive, donc :

$$\int_a^b g(x)dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge.}$$

Remarque 2.1
Le résultat précédent est valable pour $g(x) \leq f(x) \leq 0$.
On aurait également pu prendre $f, g :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Exemples 2.2 *1) Etudier* $\int_1^\infty \frac{1}{x^2.\sqrt{x-1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2.\sqrt{x-1}} dx + \int_2^\infty \frac{1}{x^2.\sqrt{x-1}} dx.$
2) Etudier la convergence de $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

Critère de Riemann.

Exercice 2.3 *1)* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ *converge ssi* $\alpha > 1$.
2) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ *converge ssi* $\alpha < 1$.

Proposition 2.4 *Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,* **positive***.*

$$(\exists \alpha > 1 / \lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0) \implies \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$

$$(\exists \alpha \leq 1 / \lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ diverge.}$$

Preuve.
Si $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$, il existe $A, M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \geq A, x^\alpha f(x) \leq M$. Donc, sur $[A, +\infty[$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}$ dont l'intégrale converge si $\alpha > 1$.
CQFD

Exemples 2.5 *convergence de* $\int_0^{+\infty} e^{-x^\beta} dx$ *(*$\beta > 0$*) et* $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)}$.

Remarque 2.6 *La réciproque est fausse.*
Ex. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)} dx$.

De la même façon, on montre la

Proposition 2.7 *Soit* $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*,* **positive**.

$$(\exists \alpha < 1 / \lim_{x\to a} (x-a)^\alpha f(x) = 0) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \textit{ converge.}$$

$$(\exists \alpha \geq 1 / \lim_{x\to a} |(x-a)^\alpha f(x)| = +\infty) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \textit{ diverge.}$$

Exemples 2.8 *Appliquer ce résultat à* $\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln(x)|^\beta dx$ *(*$\beta \in \mathbb{R}$*) et* $\int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx$.

3 Intégrales impropres et fonctions équivalentes.

Théorème 3.1
Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continue (*$b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*) telles que* $f \sim_b g$ *et* $\boldsymbol{f}$ **de signe constant sur** $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}[$ *(*$c < b$*).*
On a

$$\int_a^b g(x)dx \textit{ converge} \Longleftrightarrow \int_a^b f(x)dx \textit{ converge.}$$

Preuve.
Supposons $f \geq 0$ sur $[c, b[$.
$f = (1 + \epsilon(.))g$ avec $\epsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers b, donc pour x assez proche de b, $0 \leq \frac{1}{2}.g(x) \leq f(x) \leq 2.g(x)$. D'où le résultat par comparaison.
CQFD

Remarque 3.2
On aurait pu considérer $f, g :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *avec* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* f *de signe constant sur* $[a, c[$ *(*$a < c$*).*

Exercice 3.3 *Etudier la convergence suivant* $p, n \in \mathbb{N}^*$ *de* $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[p]{x}} dx$.

4 Intégrales absolument convergentes et semi-convergente.

Définition 4.1 *Une intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *est dite* **absolument convergente** *ssi* $\int_a^b |f(t)|dt$ *est convergente.*

Exemples 4.2 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ *converge.*

Proposition 4.3 *Une intégrale absolument convergente est convergente.*

Preuve.
$f_+ = max(f,0), f_- = min(f,0)$, alors $\int f = \int f_+ + \int f_-$ et $0 \leq \int f_+ \leq \int |f|, 0 \leq -\int f_- \leq \int |f|$ d'où le résultat.
CQFD

Intégrales semi-convergente.

Définition 4.4 *Une intégrale est dite semi-convergente si elle converge mais n'est pas absolument convergente.*

DESSIN (compensation)

Exercice 4.5 *Equivalents et fonctions alternées.*

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ *est convergente. L'est-elle absolument ?*

b) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}.(1+\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}})dx$*. Que peut-on en déduire sur l'étude d'une intégrale généralisée et l'équivalence ?*

Remarque 4.6 *ATTENTION*
Le critère d'équivalence n'est pas valable pour les fonctions de signe non constant.
Voir exo ci-dessus.

Théorème 4.7 *(petit théorème d'Abel)*
$\int_a^{+\infty} sin(x).f(x)dx$*, avec* $f(x)$ *positive décroissante vers 0, converge.*

Preuve.
Supposons $a \leq n_0\pi$. $\int_{n_0.\pi}^{+\infty} sin(x).f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{n_0\pi}^b \sin(x).f(x)dx$ si cette limite existe.
$\int_{n_0\pi}^b \sin(x).f(x)dx = \sum_{k=n_0}^{n_b} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} sin(x).f(x)dx + \int_{n_b\pi}^b \sin(x).f(x)dx$
(où n_b est tel que $(n_b+1)\pi \leq b$ et $(n_b+2).\pi > b$).
De plus $0 \leq |\int_{n_b\pi}^b \sin(x).f(x)dx| \leq f(n_b\pi)\pi$ et $f(n_b\pi)\pi$ qui tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$.

Il suffit donc de vérifier que $\sum_{k=n_0}^{n_b} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} sin(x).f(x)dx$ converge :
$\forall [k\pi,(k+1)\pi]$, $f((k+1)\pi) \leq f(x) \leq f(k\pi)$. donc $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} sin(x).f(x)dx$ est comprise entre $f((k+1)\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} sin(x)dx$ et $f(k\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} sin(x)dx$ (le sens de l'encadrement dépend de la parité de k). Donc il existe $c_k \in [k\pi,(k+1)\pi]$ tel que $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} sin(x).f(x)dx = f(c_k) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} sin(x)dx$ (Théorème des valeurs intermédiaires).

Finalement $\int_a^{+\infty} sin(x).f(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k f(c_k)$, avec $(f(c_k))_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante.
D'où la convergence (voir chap. sur les séries numériques).
CQFD

En affinant la preuve ci-dessus, on peut démontrer également le

Théorème 4.8 *(Théorème d'Abel) (admis)*
Soit $f(t)$ une fonction positive et décroissante vers 0 sur $[a, +\infty[$.
Soit g une fonction continue admettant une primitive bornée sur $[a, +\infty[$ (i.e. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, +\infty[, |\int_a^x g(t)dt| < M$).
Alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt \ converge$$

5 Exemples de fonctions définies par une intégrale.

5.1 Fonctions définies par $f(x) = \int_0^x g(t)dt$.

Soit $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors pour $c \in [a, b[$, $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_c^x g(t)dt$ est $\mathcal{C}^1$. On a $f'(x) = g(x)$.

Exercice 5.1 *Dériver $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cosh(t)}{t}dt$ et $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.*

5.2 Intégrale de Gauss.

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2}dx.$$

On définit les fonctions f, g sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = [\int_0^x e^{-t^2}dt]^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}dt$.

a) Montrer que $f' + g' = 0$ en utilisant le théorème de dérivation ci-dessous (admis).

Théorème 5.2 *Soit $(x, t) \mapsto f(x, t)$ continue sur $I \times [a, b]$ (I intervalle non-vide et non réduit à un point) telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times [a, b]$.*
Alors $x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'(x) = \int_0^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

b) Déterminer $f + g$. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

5.3 Fonction Gamma.

VOIR TD