le 5 Décembre 2011 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

# Séries de Fourier

## 1 Les Séries trigonomètriques.

**Définition 1.1** *Soient* $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *deux suites numériques.*
*On appelle* **suite trigonométrique** *de période* $T$ *une suite de terme général*

$$u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

*avec* $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *(pulsation).*
*Soit* $(u_n(x))_n$ *une suite trigonométrique, on appelle* $S(x) = \sum u_n(x)$ **série trigonométrique ou série de Fourier** *de période* $T$.
$S_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n} u_k(x)$ *s'appelle somme partielle d'ordre* $n$ *de la série* $\sum u_n(x)$.

Deux cas particuliers :

1) Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites décroissantes vers 0 alors, d'après le critère d'Abel, $\sum u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R} - \{2k\frac{\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}\}$ (uniformément sur tout intervalle fermé inclus dans ce dernier ensemble).
**Preuve.**
a) Convergence simple : Considérons $\sum a_n. \cos(nx)$. Prenons $\sum a_n.e^{inx}$ : on a alors, si $x \neq 2k\pi$, donc $\sum e^{inx} \leq M(x) = \frac{2}{|1-e^{ix}|}$ d'ou le résultat.
b) convergence uniforme sur un intervalle fermé I : Grâce à la sommation d'Abel ont peut majorer le reste $R_{n_0}$ par $Max\{M(x), x \in I\}.a_{n_0+1}$, d'où le résultat.
CQFD

2) Si $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent alors $\sum u_n(x)$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas $S(x)$ est continue.

**Remarque 1.2** *(Forme complexe d'une série de Fourier)*
*Soit* $(u_n(x))_n$ *définie par* $u_n(x) = a_n. \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ *et* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *convergente.*
*On a*

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x} \end{aligned}$$

*En posant*

$$\alpha_0 = a_0$$

$$\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ pour } n \geq 1$$

$$\alpha_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \overline{\alpha_{-n}} \text{ pour } n \leq -1$$

*on a*

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{in\omega x}.$$

**Exemples 1.3** *Ecrire sous forme complexe, la série de Fourier* $3+\sum_{n=1}^{n=+\infty}(\frac{1}{n}\cos(nx)+\frac{1}{n}\sin(nx))$.

# 2 Développement de Fourier d'une fonction périodique.

## 2.1 La famille des cos($nx$), sin($nx$).

a) $\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2} = \pi$ si $n \neq 0$ ($2\pi$ si $n = 0$),
b) $p \neq n$, $\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(px)dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos((n+p)x)+\cos((n-p)x)}{2} dx = 0$,
c) $\int_0^{2\pi} cos(nx)sin(px)dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin((p+n)x)+\sin((p-n)x)}{2} dx = 0$.

**Exercice 2.1** *a)* $\int_0^{T} cos(n\omega x)cos(n\omega x)dx = \int_0^{T} \frac{1+\cos(2n\omega x)}{2} = \frac{T}{2}$ *si* $n \neq 0$ *(*$T$ *si* $n = 0$*),*
*b)* $p \neq n$, $\int_0^{T} cos(n\omega x)cos(p\omega x)dx = \int_0^{T} \frac{\cos((n+p)\omega x)+\cos((n-p)\omega x)}{2} dx = 0$,
*c)* $\int_0^{T} cos(n\omega x)sin(p\omega x)dx = \int_0^{T} \frac{\sin((p+n)\omega x)+\sin((p-n)\omega x)}{2} dx = 0$.

**Remarque 2.2** *(hors programme)*
*La famille* $\{sin(n\omega x), cos(n\omega x), n \in \mathbb{N}\}$ *est une* **base orthogonale** *de l'espace vectoriel (préhilbertien) normé des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*,* $T = \frac{2\pi}{\omega}$*-periodiques (produit scalaire :* $< f, g >= \int_0^T \bar{f}.g$*).*
*On pourra même travailler avec l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur* $\mathbb{R}$*,* $T = \frac{2\pi}{\omega}$*-periodiques.*

**RAPPEL :** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ *est dite* **continue par morceaux** *s'il existe* $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ *tel que* $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[a_n, a_{n+1}]$ *et* $f$ *continue sur* $]a_n, a_{n+1}[$ *admettant une limite à gauche en* $a_{n+1}$ *et une limite à droite en* $a_n$*.*

## 2.2 Coefficients de Fourier (forme réelle).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, $T$ périodique ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation).

**Remarque 2.3** *Supposons que* $f$ *peut s'écrire sous la forme d'une série trigonomètrique :*

$$i.e.\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

*En intégrant sur* $[0, T]$ *(on suppose qu'on peut intégrer terme à terme : convergence uniforme par exemple), on obtient*

$$\int_0^T f(x)dx = Ta_0.$$

*En utilisant le paragraphe 2.1, on obtient également*

$$\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx = \frac{T}{2}a_n \text{ et } \int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx = \frac{T}{2}b_n$$

**Définition 2.4** *On définit les* **coefficients de Fourier réels** *de $f$ par :*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

*et pour $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt.$$

*Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$ s'appelle* **développement de Fourier de $f$**.

**Remarque 2.5**
*i) On peut intégrer sur un intervalle quelconque d'amplitude $T$.*
*ii) Si $f$ est une fonction paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$.*
*iii) Si $f$ est une fonction impaire, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.*
*iv) $a_0$ est la valeur moyenne de $f$ sur un intervalle de longueur $T$.*
*v) Si $f$ est développable en* **série de Fourier** *(intégrable terme à terme), cette série est unique et les coefficients sont donnés par les formules ci-dessus.*

**Exemples 2.6** *Quel est le développement en Série de Fourier des fonctions :*
*1) $f$, $2\pi$-périodique égale à $x$ sur $]-\pi,\pi[$ ?*

*2) $f$, $2\pi$-périodique égale à $x-\pi$ sur $]0,2\pi[$ ?*

*3) $f$, $2\pi$-périodique, impaire égale à $\pi$ sur $]-\pi,0[$ ?*

*4) $f$, définie par $f(x) = 0$ si $x \in ]2n, 2n+1]$ et $f(x) = 1$ si $x \in ]2n+1, 2n+2]$ ?*

*5) $f$, $2\pi$-périodique définie par $f(x) = |\cos(x)|$ ?*
*Quelle est le type de convergence ?*

## 2.3 Forme complexe.

**Définition 2.7** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, $T$ périodique ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation) On définit les* **coefficients de Fourier complexes** *de $f$ :*

$$c_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

*et pour $n \in \mathbb{Z}^*$,*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt.$$

*Dans ce cas*

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f).e^{in\omega t}.$$

**Exemples 2.8** *1) Soit la fonction $2\pi$-périodique définie par $f(x) = 1$ sur $]-\pi,\pi]$ .*
*Quel est son développement de Fourier complexe ?*
*2) Soit la fonction $2\pi$-périodique définie par $f(x) = 1$ sur $]0,\pi]$, $f(x) = 0$ sur $]\pi, 2\pi]$.*
*Quel est son développement de Fourier complexe ?*
*En déduire le développement de Fourier réel.*
*Retrouver les coefficients réels directement.*

## 2.4 Convergence ponctuelle.

**Théorème 2.9** *(théorème de Dirichlet) (admis en partie)*
*Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, $T$ périodique, telle que $f'$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (i.e. $f$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux).*
*Alors, en tout point $x \in \mathbb{R}$,*

$$\hat{f}(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad (= f(x) \text{ si } f \text{ continue en } x).$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$.

**Preuve.**
Preuve dans le cas où $f$ $2\pi$**-périodique et dérivable 2 fois sur** $[-\pi,\pi]$**.**
Soit $x \in ]-\pi,\pi[$.
Soient les coefficients de Fourier de $f$ :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Nous voulons montrer que la série $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge et que la limite est $f(x)$.

**1) Fixons $x \in ]-\pi, \pi[$.**

$$\begin{aligned} S_n(x) &= a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^n (\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt.\cos(kx) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt.\sin(kx)) \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[1 + 2\sum_{k=1}^n \cos(k(t-x))]dt \end{aligned}$$

En passant à la forme complexe, on montre que

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k(t-x)) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)} = e^{-in(t-x)} \sum_{k=0}^{2n} e^{ik(t-x)}$$

$$= e^{-in(t-x)} \frac{e^{i(2n+1)(t-x)} - 1}{e^{i(t-x)} - 1} = \frac{e^{i(n+1)(t-x)} - e^{-in(t-x)}}{e^{i\frac{t-x}{2}}(e^{i\frac{t-x}{2}} - e^{-i\frac{t-x}{2}})}$$

$$= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})(t-x)} - e^{-i(n+\frac{1}{2})(t-x)}}{e^{i\frac{t-x}{2}} - e^{-i\frac{t-x}{2}}} = \frac{\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})}{\sin(\frac{t-x}{2})}.$$

**Donc**

$$\boldsymbol{S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})}{\sin(\frac{t-x}{2})}dt.}$$

**2) Montrons que**

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})}{\sin(\frac{t-x}{2})}dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})}{\sin(\frac{t-x}{2})}dt.}$$

On définit $\phi(t) = \frac{f(t)-f(x)}{\sin(\frac{t-x}{2})}$, alors

$$\phi(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.\frac{t-x}{\sin(\frac{t-x}{2})} \longrightarrow_{t\to x} 2f'(x).$$

et

$$\phi'(t) = \frac{f'(t).\sin(\frac{t-x}{2}) - (\frac{f(t)-f(x)}{2}).\cos(\frac{t-x}{2})}{(\sin(\frac{t-x}{2}))^2} \longrightarrow_{t\to x} 2f''(x).$$

On étudie alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})dt$$

Une intégration par partie montre alors facilement que la limite est nulle ($\phi$ et $\phi'$ sont bornées).

**3) Il reste donc à calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})}{\sin(\frac{t-x}{2})} dt$.**

Posons $A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})}{\sin(\frac{t-x}{2})} dt$.
On montre facilement

$$A_0 = 2\pi$$

$$A_n - A_{n-1} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})}{\sin(\frac{t-x}{2})} dt = 2\pi.$$

**On obtient donc :**

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{f(x)}{2\pi} \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})}{\sin(\frac{t-x}{2})} dt = \frac{f(x)}{2\pi}.2\pi = f(x).$$

CQFD

**Remarque 2.10** *1) Si $f$ est continue, la convergence est normale (admis).*
*2) On peut calculer les coefficients de Fourier de toute fonction $f$ continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$. Il suffit pour cela de considérer la fonction $(b-a)$-périodique égale à $f$ sur $[a, b]$*

**Exemples 2.11**
*1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2-periodique, avec $\forall x \in [-1, 1[, f(x) = x + 1$.*
*2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi$-périodique, paire, telle que $\forall t \in [0, \pi], f(t) = t$.*
*Déterminer $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.*

# 3 Formule de Parseval.

Considérons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $T$ périodique ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation).
On a vu que dans ce cas

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} \textit{ presque partout}$$

avec $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x}$.
Or

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega x} e^{-ip\omega x} dx = \begin{cases} 0 & si\ n \neq p \\ 1 & si\ n = p \end{cases}$$

On en déduit le

**Théorème 3.1** *$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, $T$ périodique.*
*Alors*

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T f.\bar{f}(x)dx &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 && (\textit{forme complexe})\\ &= a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2} && (\textit{forme réelle}).\end{aligned}$$

**Preuve.**
- multiplication des séries (développement).
- Intégration terme à terme.
CQFD

**Exemples 3.2** *Développer en série de Fourier la fonction $x\mapsto f(x)$, impaire, de période $2\pi$ égale à $\pi-x$ pour $0<x<\pi$ et en déduire la somme de $\sum\frac{1}{n^2}$.*

# 4 Pour aller plus loin : transformée de Laplace et application à la résolution d'équations différentielles.

## 4.1 Transformée de Laplace.

**Définition 4.1** *Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ avec $\forall x\in\mathbb{R}_-, f(x)=0$. On définit la* **transformée de Laplace** *de $f$ :*

$$L_f(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt,$$

*pour $p\in\mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge.*

**Remarque 4.2** *1) Dans la suite, nous travaillerons avec $L_f(p)$ définie pour $p\in\mathbb{R}$.*
*2) $L_f$ n'est pas définie partout.*
*3) Si $L_f(a)$ existe alors $\forall p\geq a$, $L_f(p)$ existe ($a>0$).*
*4) Nous travaillerons dans la suite avec les fonctions continues par morceaux sur tout intervalle du type $[0,A]$ ($A>0$) et telles que $\exists M,a\in\mathbb{R}/\forall x,|f(x)|\leq M.e^{ax}$. Dans ce cas, la transformée de Laplace est définie pour tout $p>a$.*

### 4.1.1 Exemple classique.

1) $\forall x\in\mathbb{R}_+, f(x)=1$ alors $L_f(p)=\frac{1}{p}$.
2) $\forall x\in\mathbb{R}_+, f(x)=x^n$ ($n\in\mathbb{N}$) alors $L_f(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$.
3) $\forall x\in\mathbb{R}_+, f(x)=e^{at}$ ($a\in\mathbb{R}$) alors $\forall p>a, L_f(p)=\frac{1}{p-a}$.
4) $\forall x\in\mathbb{R}_+, f(x)=\cos(\omega.x)$ ($\omega\in\mathbb{R}^*$) alors $\forall p\in\mathbb{R}, L_f(p)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$.
5) $\forall x\in\mathbb{R}_+, f(x)=\sin(\omega.x)$ ($\omega\in\mathbb{R}^*$) alors $\forall p\in\mathbb{R}, L_f(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

## 4.2 Propriétés.

1) La transformée de Laplace est linéaire

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, L_{\lambda.f+\mu.g} = \lambda.L_f + \mu.L_g.$$

2) Soit $g(t) = f(a.t)$ (($a > 0$) alors

$$L_g(p) = \frac{1}{a}.L_f(\frac{p}{a})$$

3) Si $f$ est dérivable alors

$$L_{f'} = p.L_f - f(0).$$

4) Si $f$ est 2 fois dérivable alors

$$L_{f''} = p.L_{f'} - f'(0) = p^2.L_f - p.f(0) - f(0).$$

**Exercice 4.3** *Généraliser par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ $n$ fois dérivable.*

## 4.3 Transformée de Laplace inverse.

**Théorème 4.4** *(admis)*
*Si $F$ est la transformée de Laplace de $f$ alors $f$ est unique. On note $f = L_F^{-1}$.*

**Exemples 4.5** *Rechercher $f$ telle que $L_f(p) = \frac{1}{p^2-1}$.*

### 4.3.1 Application aux équations différentielles linéaires à coefficients constant.

**Exemples 4.6** *1) Résoudre ($E_1$) $y''' + y' = e^x$ avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.*
*2) Résoudre ($E_2$) $y'' - y' = \sin(2t)$ avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$.*