le 3 Janvier 2012 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

Séries Entières

1 Définition, exemples.

Définition 1.1 *Soient* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *une suite numérique (réelle ou complexe).*
On appelle **série entière autour de** $z_0 \in \mathbb{C}$ *une série de terme général*

$$u_n(z) = a_n.(z - z_0)^n.$$

On la note $\sum a_n(z - z_0)^n$
$S_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n} a_k(z - z_0)^k$ *s'appelle somme partielle d'ordre* n *de la série.*

Remarque 1.2 *i) Dans ce cas où on travaille dans* $\mathbb{R}$*, on note souvent les séries :* $\sum a_n(x - x_0)^n$.
ii) Dans la suite on prendra $z_0 = 0$.

Exemples 1.3 *1) Les polynômes sont des séries entières.*
2) $\sum x^n$ *est une série entière convergente simplement sur* $]-1, 1[$*, normalement sur* $]-a, a[$ $(0 < a < 1)$*. De plus sur* $]-1, 1[$*,* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$*. Sur* $\mathbb{C}$*, la série* $\sum z^n$ *converge ssi* z *appartient au disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* 1 *:* $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$.
3) $\sum \frac{x^n}{n!}$.
4) $\sum \frac{x^n}{1+n^2}$.
5) $\sum \frac{x^n}{1+n}$.

2 Convergence d'une série entière.

2.1 Rayon de convergence.

Proposition-définition 2.1 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière.*
Il existe $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tel que :*
i) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R, \sum a_n z^n$ *converge absolument,*
ii) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R, \sum a_n z^n$ *diverge.*
R *s'appelle le* **rayon de convergence** *de la série* $\sum a_n z^n$.

Preuve.
$R = \sup\{r \geq 0/|a_n|r^n \textit{ borné}\}$ ($\{r \geq 0/|a_n|r^n \textit{ borné}\}$ est un intervalle).
(ii) est clair.
(i) Supposons $|z| < R$.
Soit $R' > 0$ avec $|z| < R' < R$.
Alors $|a_n|(R')^n < M$.
$|a_n z^n| = |a_n|(R')^n(\frac{|z|}{R'})^n < M(\frac{|z|}{R'})^n$ dont la somme converge ($\frac{|z|}{R'} < 1$).
CQFD

Remarque 2.2 *i) Dans le cas $|z| = R$, la série peut converger ou pas.*
Exemple : $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

ii) La preuve nous permet d'affirmer que, pour $\sum a_n z^n$, si on a $l \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$\forall |z| < l$, $(|a_n||z|^n)_n$ est borné,
$\forall |z| > l$, si $(|a_n||z|^n)$ est non borné.
Alors l est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
Exemple : $\sum e^{-\sqrt{n}} z^n$.

iii) $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R est normalement convergente sur le **disque fermé** *$\bar{D}(0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$ avec $0 < r < R$ (donc uniformément convergente). On en déduit que $\sum a_n z^n$ est continue sur* **le disque ouvert** *$D(0, R) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$*

iv) On peut montrer, grâce au théorème d'abel, qu'en cas de convergence d'une série entière de rayon de convergence R à une borne de l'intervalle $]-R, R[$, la série est continue en ce point (ATTENTION : ce n'est pas vrai dans $\mathbb{C}$).

Exemples 2.3 *i) rayon de convergence R de $\sum a^n z^n$.*
ii) Montrer que $\sum a^n z^n$ ne converge pas uniformément sur $]-R, R[$.

Proposition 2.4 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.*

(i) Si $\forall n > N$, $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$.

(ii) Si $|a_n| \sim_{n \to +\infty} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Preuve.
En exo.
CQFD

Règle de d'Alembert pour les séries entières.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
$|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}||z|$.
Si $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \longrightarrow_{n \to +\infty} l$ alors $|\frac{a_{n+1}}{a_n}||z| \longrightarrow_{n \to +\infty} l|z|$.

On en déduit donc la

Proposition 2.5 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière.*
Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *converge vers* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *lorsque* $n \to +\infty$ *alors le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *est* $R = \frac{1}{l}$.

Exemples 2.6 *i) Quel est le rayon de convergence de* $\sum \frac{n^3-n+2}{2n^4+n^2+1} z^n$ *? Généraliser à l'ensemble des Séries entières* $\sum a_n x^n$ *avec* $a_n \in \mathbb{C}(X)$.

ii) Rayon de convergence de $\sum \ln(n^2+1) z^n$.

iii) Rayon de convergence de $\sum \frac{n!}{n+1} z^n$.

iv)Rayon de convergence de $\sum \frac{n^2+n}{2^n+n!} z^n$.

Règle de Cauchy pour les séries entières.

Proposition 2.7 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière.*
Si $\sqrt[n]{a_n}$ *converge vers* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *lorsque* $n \to +\infty$ *alors le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *est* $R = \frac{1}{l}$.

2.2 Opération sur les séries et rayon de convergence.

$\{\sum a_n z^n$ *série entière*$\}$ est un espace vectoriel muni des lois :
$\lambda . \sum a_n z^n := \sum \lambda a_n z^n$
$\sum a_n z^n + \sum b_n z^n := \sum (a_n + b_n) z^n$.

Proposition 2.8 *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectif* R_a *et* R_b.

(i) Si $\lambda \neq 0$, *le rayon de convergence de* $\lambda . \sum a_n z^n$ *est* R_a.

(ii) $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n$ *a pour rayon de convergence* $R \geq min\{R_a, R_b\}$ *avec égalité si* $R_a \neq R_b$.

Preuve.
En exo.
CQFD

Exemples 2.9 *(i)* $\sum z^n$ *et* $\sum n z^n$.

(ii) $\sum z^n$ *et* $\sum (\frac{1}{2^n} - 1) z^n$.

Proposition 2.10 *Soient* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectif* R_a *et* R_b.
$\sum_{n \geq 0} a_n z^n \times \sum_{n \geq 0} b_n z^n := \sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^{n} a_k . b_{n-k}) z^n$ *a pour rayon de convergence* $R \geq min\{R_a, R_b\}$.

Preuve.
En exo
CQFD

Exemples 2.11 *(i)* $\sum x^n$ *et* $\sum(-1)^n x^n$.
(ii) $\sum x^n$, $1-x$.
(iii) $\sum x^n$, 0.

2.3 Dérivation et intégration d'une série entière.

Soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Soit la série entière
$$S'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ alors $(|a_{n+1}z^n|)_n$ n'est pas bornée donc $(|(n+1)a_{n+1}z^n|)_n$ ne l'est pas non-plus donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ est $R' \leq R$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a $r > 0$ avec $|z| < r < R$. $|(n+1)a_{n+1}z^n| = |a_{n+1}r^n|.(n+1)|\frac{z}{r}|^n$ avec $(n+1)|\frac{z}{r}|^n < 1$ pour n assez grand donc $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ converge. D'où $R' \geq R$

On en déduit la

Proposition 2.12 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R.
$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est infiniment dérivable sur* $D(0,R)$ *et les séries entières dérivées sont de rayon de convergence* R *:*
$$(\sum_{n\geq 0} a_n z^n)' = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n.$$

Preuve.
D'après ce qui précède, la convergence uniforme sur les disques $D(0,r)$ pour tout $0 < r < R$, et le théorème de dérivation des suites de fonctions.
CQFD

Exemples 2.13 *Quel est le développement en série entière de* $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Corollaire 2.14 *Si* $f(z)$ *est la somme de la série entière* $\sum a_n z^n$ *alors*
$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

Preuve.
$f^{(n)}(0) = n!a_n$ d'après le résultat précédent.
CQFD

Corollaire 2.15 *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectif* R_a *et* R_b *non nuls.*
Si $\forall |x| \leq \min\{R_a, R_b\}, \sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ *alors* $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

Corollaire 2.16 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ *une série entière de rayon de convergence* R.
$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *est intégrable terme à terme sur* $[a,b] \subset]-R,R[$ *et*

$$(\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n)' = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

3 Développement d'une fonction en série entière.

Définition 3.1 *Soit* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $\exists \epsilon > 0,]-\epsilon, \epsilon[\subset U$.
On dit que f *est* **développable an série entière en 0** *s'il existe une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R *et* $]-a, a[$ $(a > 0)$ *tels que*

$$\forall x \in]-a, a[, f(x) = \sum a_n x^n.$$

Remarque 3.2 *i) D'après ce qui précède, Si* f *est développable en série entière* $\sum a_n x^n$ *en* 0 *alors ce développement est unique et* $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

ATTENTION : il existe des fonctions infiniment dérivables qui n'admettent pas de développement en série entière.
Ex. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$.

ii) Soit $f :]-a, a[\mathbb{R}$ $(a > 0)$ *infiniment dérivable. La* **formule de MacLaurin** *nous donne*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-a, a[, \exists \theta \in]0,1[, f(x) = f(0) + xf'(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta.x).$$

Si $\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta.x)$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$ *alors* f *est développable en série entière sur* $]-a, a[$.

iii) Si f *est impaire (resp. paire), le développement en série entière ne fait intervenir que des puissances impaires (resp. paires).*

Exemples 3.3 *i)* exp, sin, cos, sinh, cosh.
ii) $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \arctan(x)$.

4 Exemples d'applications des séries entières.

4.1 Équations différentielles linéaires.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire, on peut chercher les solutions développables en série entière. Mais ce ne sont pas toutes les solutions.

Exemples 4.1 *Trouver les solutions développables en série entière de* (E) $y'' + 2xy' + 2y = 0$. *Reconnaitre les solutions paires.*

Exercice 4.2 *Trouver la solution (sous forme de série entière) de* (E) $y'' + xy = x^2 + x + 2$ *satisfaisant aux conditions initiales* $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ *(préciser l'intervalle sur lequel la solution est valable).*

4.2 Intégrales.

Exemples 4.3 $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ $(\alpha > 0)$. *Donner la valeur de* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 4.4 *Montrer que* $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

4.3 Exponentielle complexe.

On a vu que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

De plus

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} + i. \sum (-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}.$$

On peut donc définir

Définition 4.5 *On défnit* **l'exponentielle complexe**

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Remarque 4.6 *(en exo.) On retrouve grâce à cette définition et aux propriétés des séries les relations :*
i) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$,
ii) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$,
iii) $e^{nz} = (e^z)^n$.

Développements usuels en séries entières autour de 0.

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$,
$\cosh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$,
$\sinh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$,
$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}$,
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}$,
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$,
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$,
$\arctan(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3....(2n-1)}{2.4...(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.