le 30 Septembre 2010 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

Séries numériques

Introduction.

Une série est la somme des termes d'une suite. Mais la théorie des séries n'est pas qu'une simple application des résultats obtenus sur les suites. De nombreuses constantes, valeurs de fonctions ne peuvent être définies que par des séries. On pourra également remarquer qu'une suite peut se ramener à une série.

1 "Rappel" sur les suites de Cauchy.

Définition 1.1 *On appelle* **suite de Cauchy***, une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \epsilon.$$

Exemples 1.2 *1) Considérons la suite définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $u_{n+1} = u_n + \frac{\sin(n)}{2^n}$*. Cette suite est de Cauchy*
2) Soit la suite $(S_n)_n$ *définie par* $S_1 = 1$*,* $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$*,* $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$*.*
$(S_n)_n$ *n'est pas une suite de Cauchy.*

Proposition 1.3 *Toute suite convergente est de Cauchy*

Preuve.
Soit $(u_n)_n$ convergente vers l.
Soit $\epsilon > 0$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Alors, $\forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \epsilon$.
CQFD

Proposition 1.4 **Dans** $\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$*, toute suite de Cauchy est convergente (*$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont* **complets***).*

Preuve.
Dans $\mathbb{R}$.
On montre tout d'abord qu'une suite de Cauchy est bornée (exo).
Si on considère alors ($\mathbb{R}$ complet) les deux suites de terme général $i_p = \inf((u_n)_{n \geq p})$ et $s_p = \sup((u_n)_{n \geq p})$, elles sont adjacentes donc admettent une limite l
Par le théorème des gendarmes, l est alors la limite de $(u_n)_n$.
CQFD

Remarque 1.5 *La proposition précédente n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$.*
Exemple : $u_n = \frac{E(\sqrt{2}.10^n)}{10^n}$.

2 Les séries numériques.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 *Soit $(u_n)_{n \leq n_0} \subset \mathbb{K}$ une suite.*
On appelle **série de terme général** u_n *la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \text{ (somme partielle d'ordre } n).$$

On la note $\sum u_n$.

Définition 2.2 *Une série $\sum u_n$ est dite* **convergente** *ssi la suite (S_n) est convergente.*
Cette limite est appelée somme de la série et notée

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Sinon, on dit que la série est divergente.
Dans le cas d'une série convergente de limite S, $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé **reste d'ordre n de $\sum u_n$.**

Exemples 2.3 *i) Soit la série $\sum \frac{1}{n.(n+1)}$:*

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n.(n+1)}.$$

ii) Soit la série $\sum \frac{1}{n}$ *(série harmonique) :*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

Remarque 2.4 *Les exemples précédents montrent* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ *est une condition* **nécessaire** *mais* **non suffisante** *pour que* $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 2.5 $a, q \in \mathbb{R}$. *A quelles conditions* $\sum a.q^n$ *est-elle une série convergente ?*

3 Opérations sur les séries.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries numériques et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit
la somme : $\sum u_n + \sum v_n := \sum(u_n + v_n)$,
le produit par un scalaire $\boldsymbol{\lambda}$: $\lambda. \sum u_n := \sum(\lambda.u_n)$.

D'après les propriétés des limites de suites numérique, on a :
Si $\sum u_n$ converge vers k et $\sum v_n$ converge vers l alors $\sum u_n + \sum v_n$ converge vers $k+l$ et $\lambda. \sum u_n$ converge vers $\lambda.k$.
Ce qui fait de l'ensemble des séries convergentes munis des 2 lois précédentes **un espace vectoriel**.

Remarque 3.1 *(exo)*
La somme de deux séries divergentes, n'est pas forcément divergente. Trouver un exemple.

Exercice 3.2 *Déterminer la convergence et la somme de* $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$.

4 Séries numériques à termes positifs.

Définition 4.1 *On appelle* $\sum u_n$ *série à termes positifs si* $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq 0$.

Remarque 4.2 *On supposera, pour simplifier les notations, que tous les termes sont positifs.*

4.1 Critère de comparaison.

Théorème 4.3 *Soient* $\sum u_n$, $\sum v_n$ *deux séries numériques* **positives** *telles que* $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$.
i) Si $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge,*
ii) Si $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Preuve.
i) Croissante majorée donc convergente.
ii) Non majorée donc divergente.
CQFD

Exercice 4.4 *1) La suite* $U_n = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k2^k}}$ *est-elle convergente ?*
2) La série $\sum \frac{1}{\ln(1+n)}$ *est-elle convergente.*

4.2 Critère de d'Alembert.

Théorème 4.5 *Soit* $\sum u_n$ *une série* **positive** *telle que* $\frac{u_n+1}{u_n}$ *converge vers une limite* $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
i) Si $R < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge.*
ii) Si $R > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Preuve.
i) Si $R < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha < 1$, tels que $\forall n \geq N$, $u_n \geq 0$ et $\frac{u_n+1}{u_n} \leq \alpha$. Donc $\forall n \geq N$ $u_n \leq \alpha^{n-N} u_N$. Or $\sum \alpha^{n-N} u_N$ converge, d'où le résultat par comparaison.
ii) Si $R > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 1$, tels que $\forall n \geq N$, $u_n \geq 0$ et $\frac{u_n+1}{u_n} \geq \alpha$. Donc $\forall n \geq N$ $u_n \geq \alpha^{n-N} u_N$. Or $\sum \alpha^{n-N} u_N$ diverge, d'où le résultat par comparaison.
CQFD

Remarque 4.6 *la preuve nous pousse à affiner un peu le critère ci-dessus. (***exo.***)*

Remarque 4.7 *ATTENTION !*
i) Soit $\sum u_n$ *avec* $u_n = \frac{1}{n}$*. Alors* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *et* $\sum u_n$ *diverge (*$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$*).*
ii) Soit $\sum u_n$ *avec* $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$*. Alors* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *et* $\sum u_n$ *converge (*$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$*).*

Exercice 4.8 *Etudier, suivant la valeur de* $\alpha \in \mathbb{R}$*, la convergence de la série* $\sum \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$*.*

4.3 Critère de Cauchy.

Théorème 4.9 *Soit* $\sum u_n$ *une série positive telle que* $\sqrt[n]{u_n}$ *converge vers une limite* $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
i) Si $R < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge.*
ii) Si $R > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Preuve.
i) Si $R < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha < 1$, tels que $\forall n \geq N$, $u_n \geq 0$ et $\sqrt[n]{u_n} \leq \alpha$. Donc $\forall n \geq N$ $u_n \leq \alpha^{n-N}$. Or $\sum \alpha^{n-N}$ converge, d'où le résultat par comparaison.
ii) Clair car dans ce cas, $u_n \longrightarrow +\infty$.
CQFD

Remarque 4.10 *la preuve nous pousse à affiner un peu le critère ci-dessus. (***exo.***)*

Exercice 4.11 *1) Etudier suivant $a, b, c, d \in \mathbb{R}_*^+$, $\sum(\frac{an+b}{cn+d})^n$.*
2) Etudier, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\sum \frac{2^n}{n^2}\sin^{2n}(\alpha)$.
3) Etudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^{n.\ln(n)}}$.

Remarque 4.12 *ATTENTION!*
i) Soit $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n}$. Alors $\sqrt[n]{u_n} < 1$ et $\sum u_n$ diverge ($\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$).
ii) Soit $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors $\sqrt[n]{u_n} < 1$ et $\sum u_n$ converge ($\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$).

4.4 Critère d'équivalence.

Théorème 4.13 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries positives telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.*

Preuve.
i) Supposons que $\sum u_n$ converge. On a $v_n = (1+\epsilon(n))u_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $0 < v_n \leq 2.u_n$. D'où le résultat par comparaison.
ii) Supposons que $\sum u_n$ diverge. On a $v_n = (1+\epsilon(n))u_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $v_n \geq \frac{1}{2}.u_n > 0$. D'où le résultat par comparaison.
CQFD

Exercice 4.14 *1) $\sum \frac{n+\sqrt{n}}{n^3-1}$,*
2) $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

4.5 Comparaison avec une intégrale.

Proposition 4.15 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue décroissante, définie sur $[p, +\infty[$ ($p \in \mathbb{N}$). Alors $\forall N > a$, $N \in \mathbb{N}$*

$$\int_{a+1}^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a+1}^{N} f(k) \leq \int_a^N f(t)dt.$$

Preuve.
DESSINS
CQFD

On en déduit le

Théorème 4.16 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *décroissante, définie sur* $[p, +\infty[$ *(*$p \in \mathbb{N}$*). Alors la série* $\sum f(n)$ *est de même nature que l'intégrale impropre*

$$\int_p^{+\infty} f(t)dt.$$

Exemples 4.17 *Séries de Riemann.*
$\sum u_n$ *avec* $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Remarque 4.18 *(Critère de Riemann)*
A partir du résultat ci-dessus, on peut, de la même façon que pour les intégrales généralisées, construire de **critère de Riemann** *:*

$$((n^\alpha.u_n \longrightarrow 0) \wedge (\alpha > 1)) \Longrightarrow (\sum u_n \textit{ converge})$$

$$((n^\alpha.u_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\alpha \leq 1)) \Longrightarrow (\sum u_n \textit{ diverge}).$$

Exercice 4.19 *(séries de Bertrand)*
Quelle est, suivant les valeurs de α *et* β*, la nature de la série*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha.(\ln n)^\beta} \ ?$$

5 Séries numériques à termes quelconques.

5.1 Absolue convergence.

Définition 5.1 *Soit* $\sum u_n$ *une séries numérique. Si la série de* $\sum |u_n|$ *est une série convergente, on dit que* $\sum u_n$ *est* **absolument convergente**.

Théorème 5.2 *Une série numérique* $\sum u_n$ *absolument convergente est convergente. De plus,* $|\sum u_n| \leq \sum |u_n|$.

Preuve.
Dans le cas complexe, $\sum u_n = \sum Re(u_n) + i \sum Im(u_n)$ et $|Re(u_n)| \leq |u_n|$, $|Im(u_n)| \leq |u_n|$. Il suffit donc de vérifier le théorème pour une série réelle.
$\sum u_n = \sum max\{u_n, 0\} - \sum max\{-u_n, 0\}$. Or $\sum max\{u_n, 0\}$ et $\sum max\{-u_n, 0\}$ sont des séries à termes positifs qui convergent si on suppose que $\sum |u_n|$ converge.
CQFD

Exemples 5.3 $\sum \frac{\ln(n)+(-1)^n.(n+1)}{n^3}$ *est absolument convergente.*

Exercice 5.4 $a, q \in \mathbb{C}$. *A quelles conditions* $\sum a.q^n$ *est-elle une série convergente ?*

Définition 5.5 *Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.*

Exemples 5.6 *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *est convergente (voir ci-dessous) mais pas absolument convergente.*

Remarque 5.7 *En changeant l'ordre des termes d'une série réelle semi-convergente, on peut construire une série qui converge vers une limite* $l \in \mathbb{R}$ *choisie au départ.*
[Notons u_k^+ *les termes positifs et* u_k^- *les termes négatifs. Clairement* $\sum u_k^+$ *et* $\sum u_k^-$ *divergent (car la série est semi-convergente). Soit* $l \in \mathbb{R}^+$.
i) Il existe $k_1^+ \in \mathbb{N}$, *tel que* $S_1^+ = \sum_{i=0}^{k_1^+} u_i^+ > l$ *et* $\sum_{i=0}^{k_1^+-1} u_i^+ \leq l$. *Et* $|S_1^+ - l| \leq |u_{k_1^+}^+|$.
ii) Il existe $k_1^- \in \mathbb{N}$, *tel que* $S_1^- = S_1^+ + \sum_{i=0}^{k_1^-} u_i^- < l$ *et* $\sum_{i=0}^{k_1^- -1} u_i^- \geq l$. *Et* $|S_1^- - l| \leq |u_{k_1^-}^-|$.
iii) Il existe $k_2^+ > k_1^+$, *tel que* $S_2^+ = S_1^- + \sum_{i=k_1^+}^{k_2^+} u_i^+ > l$ *et* $S_1^- + \sum_{i=k_1^+}^{k_2^+-1} u_i^+ \leq l$. *Et* $|S_2^+ - l| \leq |u_{k_2^+}^+|$.
iv) Il existe $k_2^- > k_1^-$, *tel que* $S_2^- = S_2^+ + \sum_{i=k_1^-}^{k_2^-} u_i^- < l$ *et* $S_2^+ + \sum_{i=k_1^-}^{k_2^- -1} u_i^- \geq l$. *Et* $|S_2^- - l| \leq |u_{k_2^-}^-|$.
etc...
Or $|u_n|$ *converge vers* 0.
Donc la suite $\{S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, ...\}$ *converge vers* l.*]*

5.2 Séries alternées.

Définition 5.8 *Une série* $\sum u_n$ *est dite* **alternée** *ssi* $u_n = (-1)^n \alpha_n$ *avec* α_n *une suite de signe constant.*

Théorème 5.9 *Toute série réelle, alternée, telle que la suite* $(|u_n|)_n$ *décroit vers* 0 *est convergente.*

Preuve.
Supposons $\alpha_n \geq 0$. Posons $S_p = \sum_{n=0}^{p} u_n$.
Il est facile de montrer que les deux suites $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune l. Ce qui montre que $(S_p)_p$ converge vers l.
De plus, $S_{2p+1} \leq l \leq S_{2p+2}$ avec $S_{2p+2} - S_{2p+1} = \alpha_{2p+2} = |u_{2p+2}|$. D'où la majoration.
CQFD

Remarque 5.10 *On a montré que, pour une série telle que donnée dans le théorème précédent,* $|R_p| := |\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n| \leq |u_{p+1}|$. *Ce résultat sera utile pour approché la somme d'une série alternée au paragraphe 6.4.*

Exemples 5.11 *La série harmonique* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge.*
De plus, en intégrant l'egalité $\forall t \in [0,1], \sum_{n=0}^{p-1} (-t)^n = \frac{1-(-t)^p}{1+t}$, *on obtient* $\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 + (-1)^p \int_0^1 \frac{t^p}{1+t} dt$, *donc* $|\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \ln 2| \leq \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}$. *Donc la somme de la série harmonique est* $\ln 2$.

5.3 Sommation d'Abel.

On peut généraliser le résultat sur les séries alternées de la façon suivante :
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes telle que $u_n = \epsilon_n . a_n$.
Posons $\sigma_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k$.
On a alors (méthode de sommation d'Abel) :

$$\begin{aligned} S_n := \sum_{k=0}^{k=n} u_n &= \epsilon_0 . a_0 + \epsilon_1 . a_1 + ... + \epsilon_n . a_n \\ &= \epsilon_0 \sigma_0 + \epsilon_1 .(\sigma_1 - \sigma_0) + \epsilon_2 .(\sigma_2 - \sigma_1) + ... + \epsilon_n .(\sigma_n - \sigma_{n-1}) \\ &= \sigma_0 .(\epsilon_0 - \epsilon_1) + \sigma_1 .(\epsilon_1 - \epsilon_2) + ... + \sigma_{n-1} .(\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) + \sigma_n . \epsilon_n \end{aligned}$$

Supposons, de plus, que $(\epsilon_n)_n$ est une suite de réels positifs, décroissante et

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |\sigma_n| \leq M$$

Alors

$$|S_n| \leq M.(\epsilon_0 - \epsilon_1 + \epsilon_1 - \epsilon_2 + ... + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n + \epsilon_n) = M.\epsilon_0.$$

Remarque 5.12 *On montre de la même façon*

$$\forall n_0 < n_1 \in \mathbb{N}, |\sum_{k=n_0}^{k=n_1} u_n| \leq \epsilon_{n_0} . M.$$

On a donc démontré la

Proposition 5.13 *(Règle d'Abel.)*
Soient $(\epsilon_n)_n$ *une suite de réels positifs,* **décroissante de limite 0** *et* $(a_n)_n$ *une suite de complexes telle que*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |\sum_{k=0}^{k=n} a_k| \leq M$$

Alors la série $\sum u_n$ *converge et*

$$\forall n_0 < n_1 \in \mathbb{N}, |\sum_{k=n_0}^{k=n_1} u_n| \leq \epsilon_{n_0}.M.$$

Preuve.
Grâce à la dernière majoration, la suite des sommes est alors de Cauchy
CQFD

6 Estimation de la somme d'une série.

Dans quelques rares cas, on peut déterminer de façon exacte la somme d'une série numérique : séries géométrique, séries télescopiques (ex. $\sum \frac{1}{n^2-1}$),...

Dans les autres cas, pour une série convergente $\sum u_n$, on peut approximer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ par $S_p = \sum_{n=0}^{n=p} u_n$ pour p grand.
L'erreur commise est mesurée par $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ et on a

$$|R_p| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} |u_n|.$$

Notre but, pour $\epsilon > 0$ donné, est de trouver p tel que $|R_p| < \epsilon$.

Pour cela nous allons majorer cette erreur pour une série dont la convergence a été montrée grâce au critère de D'Alembert, de Cauchy, grâce à la comparaison avec une intégrale ou le critère des séries alternées.

6.1 Critère de D'Alembert.

Pour n assez grand $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq k < 1$.
Donc, pour $\boldsymbol{p}$ **assez grand** $(\boldsymbol{p \geq p_0})$, $|u_{p+1}| \leq k|u_p|$, $|u_{p+2}| \leq k^2|u_p|$, ... donc

$$|R_p| \leq |u_p|(k + k^2 + k^3 + ...) = |u_p|\frac{k}{1-k}.$$

Exemples 6.1 *Valeur approchée à* 10^{-3} *prés de* $\sum \frac{5^n}{n!}$.

6.2 Critère de Cauchy.

Pour n assez grand $\sqrt[n]{|u_n|} \leq k < 1$.
Donc, pour $\boldsymbol{p}$ **assez grand** $(\boldsymbol{p \geq p_0})$, $|u_{p+1}| \leq k^{p+1}$, $|u_{p+2}| \leq k^{p+2}$, ... donc

$$|R_p| \leq k^p(k + k^2 + k^3 + ...) = \frac{k^{p+1}}{1-k}.$$

Exemples 6.2 *Valeur approchée à* 10^{-3} *prés de* $\sum (\frac{100}{n})^n$.

6.3 Comparaison avec une intégrale.

Soit une série de terme général $u_n = f(n)$ avec f positive décroissante sur $[a, +\infty[$.
On a vu que, pour $p \geq a$,

$$\int_{p+1}^{+\infty} f(x)dx < R_p < \int_{p}^{+\infty} f(x)dx.$$

Si on approxime S par S_p, on peut majorer l'erreur par $\int_p^{+\infty} f(x)dx$.

Remarque 6.3 *Il est plus intéressant d'approximer S par $S_p + \int_{p+1}^{+\infty} f(x)dx$ et de majorer l'erreur E_p par $\int_p^{p+1} f(x)dx$ qu'on peut lui-même majorer par u_p.*

Exemples 6.4 *Valeur approchée à ϵ prés de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.*

6.4 Critère des séries alternées.

Soit une série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ avec $(a_n)_n$ suite positive décroissante de limite 0.
On a vu (remarque 5.10) que, dans ce cas, $|R_p| \leq a_{p+1}$.
Donc, si on approxime S par S_p, on peut majorer l'erreur par a_{p+1}.

Exemples 6.5 *Valeur approchée à 10^{-3} prés de $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n)}$.*