le 6 Décembre 2010 UTBM MT26
Arthur LANNUZEL
http ://mathutbmal.free.fr

Suites et Séries de fonctions

Dans ce chapitre, on travaille avec des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Les suites de fonctions.

1.1 Définition.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *(Suite de fonction)*
Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, f_n : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$.
$(f_n)_{n \geq n_0}$ est appelée suite de fonctions (réelles ou complexes).

Exemples 1.2
i) Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on peut définir la suite de fonctions réelles de terme général $f_n(x) = a_n x^n$.
ii) Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on peut définir les suites de fonctions réelles $(a_n \cos(nx))_n$ et $(b_n \sin(nx))_n$.
iii) On ne peut pas définir une suite de fonction du type $(\ln(x-n))_n$ car ces fonctions ne peuvent être définies sur un même sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1.2 Convergence simple.

Définition 1.3 *On dit que $(f_m)_m$, suite de fonction définies sur $\mathcal{D}$,* **converge simplement** *vers f ssi*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \lim_{m\to+\infty} f_m(x) = f(x).$$

$$i.e.\quad \forall x \in \mathcal{D}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Exemples 1.4 *convergence de $x \mapsto (\sin(x))^n$ sur $\mathbb{R}$? et sur $[0, \pi]$?*

1.3 Convergence uniforme.

Définition 1.5 *On dit que $(f_m)_m$, suite de fonction définies sur $\mathcal{D}$,* **converge uniformément** *vers f ssi :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathcal{D}, |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Remarque 1.6 *1) CU $\Longrightarrow$ CS*
2) f_n converge uniformément vers f sur $\mathcal{D} \Longleftrightarrow \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathcal{D}\} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.

Exemples 1.7 *1) Paradoxe de la diagonale.*

2) Convergence de la suite de fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

3) Convergence sur $[0,1]$ de la suite de fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}.$$

4) Convergence de la suite de fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}.$$

Convergence uniforme et limite.

Proposition 1.8 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergeant uniformément sur $\mathcal{D}$ vers f. Soit $a \in \overline{\mathcal{D}}$*
($\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \{$limites de suites d'éléments de $\mathcal{D}\}$).
Supposons que

$$\forall n, \lim_{x\to a} f_n(x) = l_n.$$

Alors $(l_n)_n$ converge vers une limite l et

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Preuve.
1) Montrons que $(l_n)_n$ est de Cauchy (ce qui montrera qu'elle converge).
[Soit $\epsilon > 0$.
La convergence est uniforme, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathcal{D}, |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$
Donc $\forall p, q \geq N, \forall x \in \mathcal{D}, |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon$.
Donc, en faisant tendre x vers a, $\forall p, q \geq N, |l_p - l_q| < \epsilon$.]
Donc $(l_n)_n$ converge vers une limite $l \in \mathbb{K}$.
2) Montrons que $f(x)$ converge vers l quand $x \to a$.
[Soit $\epsilon > 0$.
La convergence est uniforme, donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \forall x \in \mathcal{D}, |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$
$(l_n)_n$ converge vers l, donc $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}$.
Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$.
$f_N(x)$ converge vers l_N quand $x \to a$, donc, $\exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, (|x-a| < \eta \Longrightarrow |f_N(x) - l_N| < \frac{\epsilon}{3}$.
Donc $\forall x \in \mathcal{D}(|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$.]
Donc $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
CQFD

Corollaire 1.9 *(IMPORTANT)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $\mathcal{D}$, convergeant uniformément sur $\mathcal{D}$ vers f. Alors f est continue sur $\mathcal{D}$.

Exercice 1.10 *Domaine de convergence et limite de $(t^n)_n$. La convergence est elle uniforme sur ce domaine ? Est-elle uniforme sur $[0,1[$? sur $[0,a]$ $(0 < a < 1)$?*

Convergence uniforme et intégrale.

Proposition 1.11 *Soit $(f_m)_m$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f.*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{m\to+\infty} \int_a^b f_m(t)dt.$$

Preuve.
Pour m assez grand $-\epsilon \leq f_m - f \leq \epsilon$,
donc pour m assez grand $-\epsilon(b-a) \leq \int_a^b f_m - \int_a^b f \leq \epsilon(b-a)$.
CQFD

Exemples 1.12 *Etudier la convergence sur $[0,1]$ de $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$.*

Remarque 1.13 *ATTENTION !*
Le théorème précédent ne se généralise pas tel quel aux intégrales généralisées.
Exemple : Soit $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definie par

$$\begin{cases} f_n(x) = & 0 & si\ x \in [0, n^2-n] \cup [n^2+n, +\infty[\\ f_n(x) = & \frac{1}{n^2}x + (\frac{1}{n}-1) & si\ x \in]n^2-n, n^2] \\ f_n(x) = & -\frac{1}{n^2}x + (\frac{1}{n}+1) & si\ x \in]n^2, n^2+n] \end{cases}$$

On a besoin, en plus, dans le cas des intégrales généralisées d'une hypothèse de **convergence dominée** *(hors programme).*

Convergence uniforme et dérivée.

Proposition 1.14 *Soit $(f_m)_m$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle I, convergeant sur I vers f. Supposons que $(f'_m)_m$ converge uniformément sur I vers g.*
Alors f est dérivable et $g = f'$.

Preuve.
Soit $a \in I$.
D'aprés la proposition précédente

$$\forall x \in I, \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f'_n(x)dx = \int_a^x g(x)dx.$$

Mais $\int_a^x f'_n(x)dx = f_n(x) - f_n(a)$ qui tend vers $f(x) - f(a)$. Donc $\int_a^x g(t)dt = f(x) - f(a)$.
Donc $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$ est dérivable de dérivée $g(x)$.
CQFD

Exercice 1.15 *Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2+1/n} \end{array}$$

converge uniformément vers f non-dérivable sur $[-1,1]$.

2 Séries de fonctions.

2.1 Définition.

Définition 2.1 *On appelle* $(S_n)_{n\geq n_0}$*, série de fonctions, une suite du type*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} f_k$$

avec $f_n : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*
On la note

$$\sum f_n.$$

2.2 Convergence simple et absolue.

Définition 2.2 *On dit qu'une série de fonction* $\sum f_n$ **converge simplement** *sur* $\mathcal{D}$ *ssi la suite des sommes partielles* S_n *converge simplement sur* $\mathcal{D}$*.*
On dit qu'une série de fonction $\sum f_n$ **converge absolument** *sur* $\mathcal{D}$ *ssi la suite des sommes partielles* $\sum_{k=n_0}^{k=n} |f_n|$ *converge simplement sur* $\mathcal{D}$*.*

Remarque 2.3

$$CA \Longrightarrow CS.$$

Exercice 2.4 *Convergence simple de* $\sum x^n$*.*

2.3 Convergence uniforme.

Définition 2.5 *On dit qu'une série de fonction* $\sum f_n$ **converge uniformément** *sur* $\mathcal{D}$ *ssi la suite des sommes partielles* S_n *converge uniformément sur* $\mathcal{D}$*.*

Exemples 2.6 $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ *sur* $[0, +\infty[$*.*

2.4 Convergence normale.

Définition 2.7 *On dit qu'une série de fonction* $\sum f_n$ **converge normalement** *sur* $\mathcal{D}$ *ssi il existe uune série* $\sum a_n$ *convergente avec* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{D}, |f_n(x)| \leq a_n$*.*

Remarque 2.8

$$CN \Longrightarrow CU \Longrightarrow CS.$$
$$CN \Longrightarrow CA \Longrightarrow CS.$$

ATTENTION! Dans l'exemple ci-dessus la convergence n'est pas normale car $\sup\{|\frac{(-1)^n}{n+x}|, x \in [0, +\infty[\} = \frac{1}{n}$*.*

Exemples 2.9 *1) Etude de* $\sum \frac{\sin(nx)}{n!}$
2) et $\sum nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$*.*