le 12 Janvier 2009

UTBM MT26

# Final automne 2007

*Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est* **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

## Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

## PREMIERE PARTIE. (12 points)

1) La fonction $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$ est-elle développable en série entière en 0 sur $]-1, 1[$ ? Si oui, déterminer son développement en série entière.

**Réponse :**

**(2 points) Oui car produit et somme des series de rayon 1, donc le rayon de cette serie est $\geq 1$. On trouve, grace à la formule de Taylor ou aux opérations sur les séries : $f(x) = \sum_{n\geq 0}(n+2)x^n$.**

2) Soit $\omega = (4x^3 - 4y)dx + (4y^3 - 4x)dy$.

a) Trouver $f$ tel que $df = \omega$.

**Réponse :**

**(1 point) $f = x^4 - 4xy + y^4$.**

b) déterminer les extrema de $f$ et préciser leur nature.

**Réponse :**

**(1 point) Points critiques : $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.**

**$Q(0,0) < 0$ donc point selle, $Q(1,1) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ donc minimum, $Q(-1,-1) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ donc minimum**

3) Soient $f, \phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x, y) = f(x + \phi(y)).$$

a) Justifier le fait que $F$ est $\mathcal{C}^2$.

**Réponse :**

**(1 point) Qu'on la considère comme une fonction en $x$ ou comme une fonction en $y$, $F$ est la composée de deux fonction $\mathcal{C}^2$, elle l'est donc également.**

b) Vérifier que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

**Réponse :**
**(1 point) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x+\phi(y))$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(x+\phi(y))$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \phi'(y).f'(x+\phi(y))$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \phi'(y).f''(x+\phi(y))$.**

4) $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$ admet-elle une limite lorsque $(x,y)$ tend vers $(0,0)$ ? Justifier.

**Réponse :**
**(1 point) Sur le chemin $\{(0,y), y \in \mathbb{R}^*\}$ la limite est 0. Sur le chemin $\{(x, x^{\frac{3}{2}}), x \in \mathbb{R}^*\}$ la limite est $\frac{1}{2}$. Donc pas de limite en $(0,0)$.**

Même question avec $g(x,y) = \frac{x^2y^4}{x^2+y^4}$.

**Réponse :**
**(1 point)On pose $X = x, Y = y^2$. Alors $g(x,y) = G(X,Y) = \frac{X^2Y^2}{X^2+Y^2}$ donc la limite en $(0,0)$ est clairement 0.**

5) Déterminer sur quel domaine la fonction $f(x+iy) = (x+y+1) + i(y+2)$ suivante est holomorphe.

**Réponse :**
**(2 point) $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1 \neq -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$. Donc la fonction est dérivable en aucun point.**

6) Déterminer $f(z) = P(Re(z), Im(z)) + i.Q(Re(z), Im(z))$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $P(x,y) = x$ et $f(\pi) = \pi$.

**Réponse :**
**(2 points) $\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 1$ donc $Q(x,y) = y + \phi(x)$. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \phi'(x) = -\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ donc $\phi(x) = k \in \mathbb{R}$ et $Q(x,y) = y + k$. Mais $f(\pi) = \pi + k = \pi$ donc $k = 0$. Donc $f(z) = z$.**

TOURNER LA PAGE SVP

# DEUXIEME PARTIE (CHANGER DE FEUILLE !).

**Exercice 1** *(6 points)*

*1) Déterminer le domaine de convergence et la somme de*

$$S_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{2n+1}{n!} x^n \ (0! := 1) \ et \ S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}.x^{n+1}}{n^2+n}.$$

**Réponse :**

**(1 point)** $S_1$) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{(n+1)(2n+1)} \longrightarrow 0$ **donc** $D = \mathbb{R}$. $S_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{2n}{n!} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n = 2x \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} + e^x = 2xe^x + e^x$.

**(1 point)** $S_2$) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} \longrightarrow 1$ **donc** $R = 1$. **De plus la somme converge clairement (Riemann) en** $\pm 1$ **donc** $D = [-1, 1]$. $S_2' = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}.\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$. **Donc** $S_2 = (1+x).\ln(1+x) - x + k$. **On a clairement** $k = 0$.

*2) Soit l'équation différentielle*

$$(E) \ x.y'' - x.y' - y = 0.$$

*a) Déterminer les solutions développables en série entière de E ainsi que leur rayon de convergence.*

**Réponse :**

**(3 points)** $-y = \sum_{n\geq 0} -a_n.x^n$, $-x.y' = \sum_{n\geq 1} n.a_n.x^n$, $x.y'' = \sum_{n\geq 1} n.(n+1).a_{n+1}.x^n$.

**Si** $n = 0$, $a_0 = 0$,

**Si** $n \geq 1$, $-a_n.(1+n) + n.(n+1).a_{n+1} \Longleftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$.

**Donc** $y = a_1. \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!}.x^n$ $(a_1 \in \mathbb{R})$ **qui converge sur** $\mathbb{R}$.

*b) Reconnaître ces solutions.*

**Réponse :**

**(1 point) On a clairement** $y = a_1.x \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!}.x^{n-1} = a_1.x.e^x$

**Exercice 2** *(6 points)*

*Soit la fonction paire, $2\pi$-périodique définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ sur \ [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 \ sur \ ]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

*1) Tracer la courbe représentative de cette fonction sur $[-3\pi, 3\pi]$.*

**Réponse :**

**(1 point)**

*2) Calculer les coefficients de Fourier réels et donner le développement de Fourier correspondant de f.*

**Réponse :**
**(2 points) Paire donc $\forall n \geq 1, b_n = 0$. $a_0 = \frac{\pi}{4}$. $\forall p \geq 0, a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2p+1}$, $\forall p \geq 1, a_{2p} = 0$.**

*3) Quelle est la somme du développement de Fourier de f ?*

**Réponse :**
**(1 point) D'aprés le théorème de Dirichlet la somme est**

$$\boldsymbol{S(x) = \begin{cases} f(x) \ pour \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{N}) \\ \frac{\pi}{4} \ sinon \end{cases}}$$

*4) Montrer que*

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4} \ et \ \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Réponse :**
**(1 point) $f(0) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.**
**(1 point) Parseval : $\frac{\pi^2}{16} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2.(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.**