le 13 Janvier 2009

UTBM MT26

Final automne 2007

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

PREMIERE PARTIE. (12 points)

1) La fonction $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$ est-elle développable en série entière en 0 sur $]-1, 1[$? Si oui, déterminer son développement en série entière.

2) Soit $\omega = (4x^3 - 4y)dx + (4y^3 - 4x)dy$.
a) Trouver f tel que $df = \omega$.
b) déterminer les extrema de f et préciser leur nature.

3) Soient $f, \phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x, y) = f(x + \phi(y)).$$

a) Justifier le fait que F est $\mathcal{C}^2$.
b) Vérifier que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} . \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} . \frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

4) $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$ admet-elle une limite lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$? Justifier.
Même question avec $g(x, y) = \frac{x^2 y^4}{x^2 + y^4}$.

5) Déterminer sur quel domaine la fonction $f(x + iy) = (x + y + 1) + i(y + 2)$ suivante est holomorphe.

6) Déterminer $f(z) = P(Re(z), Im(z)) + i.Q(Re(z), Im(z))$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $P(x, y) = x$ et $f(\pi) = \pi$.

TOURNER LA PAGE SVP

DEUXIEME PARTIE (CHANGER DE FEUILLE !).

Exercice 1 *(6 points)*

1) Déterminer le domaine de convergence et la somme de

$$S_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{2n+1}{n!} x^n \ (0! := 1) \ \textit{et} \ S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}.x^{n+1}}{n^2+n}.$$

2) Soit l'équation différentielle

$$(E) \ x.y'' - x.y' - y = 0.$$

a) Déterminer les solutions développables en série entière de E ainsi que leur rayon de convergence.

b) Reconnaître ces solutions.

Exercice 2 *(6 points)*

Soit la fonction paire, 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ \textit{sur} \ [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 \ \textit{sur} \ ]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentative de cette fonction sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier réels et donner le développement de Fourier correspondant de f.

3) Quelle est la somme du développement de Fourier de f ?

4) Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4} \ \textit{et} \ \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$