le 9 Janvier 2010

UTBM MT26

Final automne 2008

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

PREMIERE PARTIE. (12 points)

1) Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ et déterminer sur quel **intervalle** ce développement est valable.

Réponse :
(2 points) $\boldsymbol{f(x) = \ln(6) - \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n})x^n}$ **sur** $\boldsymbol{[-2, 2[}$ **(critère séries alternées en -2).**

2) Justifier le fait qu'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R est continue sur $]-R, R[$.

Réponse :
(2 point). La convergence est normale sur tout disque de centre 0 et de rayon $\boldsymbol{r < R}$ **donc uniforme (Soit** $\boldsymbol{r < r' < R}$, $\boldsymbol{\forall |x| \leq r}$, $\boldsymbol{|a_n x^n| \leq |a_n (r')^n| (\frac{r}{r'})^n}$ **avec** $\boldsymbol{|a_n (r')^n|}$ **borné par définition du rayon de convergence). Or tout point de** $\boldsymbol{]-R, R[}$ **appartient à un tel disque.**

3) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}$. On définit $(b_n)_{n\geq 0}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$. Justifier.

Réponse :
(2 point) $\boldsymbol{\sum b_n x^n = \sum a_n x^{2n}}$ **qui converge si** $\boldsymbol{x^2 < R}$ **et diverge si** $\boldsymbol{x^2 > R}$**. Donc** $\boldsymbol{\sum b_n x^n}$ **converge si** $\boldsymbol{x < \sqrt{R}}$ **et diverge si** $\boldsymbol{x > \sqrt{R}}$**, donc** $\boldsymbol{R' = \sqrt{R}}$**.**

4) Déterminer le développement de Fourier complexe de la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi]$ par $f(x) = e^{2x}$. En déduire le développement de Fourier réel de f.

Réponse :
(2 points) $\boldsymbol{c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x-inx}dx = \frac{1}{2\pi}[\frac{e^{(2-in)x}}{2-in}]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}\frac{1-e^{4\pi}}{2-in}}$**.**

Rappel : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, T périodique ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) On définit les **coefficients de Fourier complexes** de f pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt.$$

5) Déterminer une fonction de la variable complexe $f(x+iy) = p(x,y) + i.q(x,y)$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $p(x,y) = xy$.

Réponse :
(2 points) On veut $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = y = \frac{\partial q}{\partial y}(x,y)$ donc $q(x,y) = \frac{y^2}{2} + k(x)$. Il suffit alors que $\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) = k'(x) = -\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = -x$ d'où $k(x) = -\frac{x^2}{2}$ par ex. On peut donc considérer $f(x+iy) = (xy) + i.(\frac{y^2-x^2}{2})$

6) Déterminer le domaine de dérivabilité au sens complexe de la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z.(1-\bar{z})$.

Réponse :
(2 point) $f(x+iy) = x-x^2-y^2+iy$. $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 1-2x$, $\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 1$. $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y$. Les condictions de Cauchy ne sont vérifiées qu'en 0. f est clairement dérivable en 0. Donc le domaine est $\{0\}$.

TOURNER LA PAGE SVP

DEUXIEME PARTIE (CHANGER DE FEUILLE !).

Exercice 1 *(5 points)*

Soit l'équation différentielle

$$(E)\ x.y'' + 2.y' + x.y = 0$$

avec les conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1) Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de E ainsi que leur rayon de convergence.

Réponse :
(3 points) Après avoir remplacé, on trouve $a_1 = 0$, $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$. On trouve donc $y = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!)} x^{2p}$

2) Reconnaître ces solutions.

Réponse :
(2 point) $y = \frac{\sin(x)}{x}$

Exercice 2 *(5 points)*

Soit la fonction impaire, 2π-périodique telle que $\forall x \in]0, \pi]$ par :

$$f(x) = x.$$

1) Tracer la courbe représentative de cette fonction sur $[-3\pi, 3\pi]$.

Réponse :
(1 point)

2) Calculer les coefficients de Fourier réels et donner le développement de Fourier correspondant de f.

Réponse :
(1 points) $b_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3) Vers quelle fonction converge le développement de Fourier de f ? Cette convergence est-elle uniforme ? Pourquoi ?

Réponse :

(1 point) D'aprés le théorème de Dirichlet la somme est

$$\boldsymbol{S(x) = \begin{cases} f(x) \ pour \ x \neq \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 \ sinon \end{cases}}$$

4) En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Réponse :
(1 point) + (1 point) en $\frac{\pi}{2}$, $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$. Parseval : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Développements usuels en séries entières autour de 0.

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$,
$\cosh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$,
$\sinh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$,
$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}$,
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}$,
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$,
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$,
$\arctan(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3....(2n-1)}{2.4...(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.