le 19 Janvier 2009

UTBM MT26

Final automne 2008

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

PREMIERE PARTIE. (12 points)

1) Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ et déterminer sur quel **intervalle** ce développement est valable.

2) Justifier le fait qu'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R est continue sur $]-R, R[$.

3) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}$. On définit $(b_n)_{n\geq 0}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$. Justifier.

4) Déterminer le développement de Fourier complexe de la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi]$ par $f(x) = e^{2x}$. En déduire le développement de Fourier réel de f.

Rappel : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, T périodique ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) On définit les **coefficients de Fourier complexes** de f pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt.$$

5) Déterminer une fonction de la variable complexe $f(x+iy) = p(x,y) + i.q(x,y)$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $p(x,y) = xy$.

6) Déterminer le domaine de dérivabilité au sens complexe de la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z.(1-\bar{z})$.

TOURNER LA PAGE SVP

DEUXIEME PARTIE (CHANGER DE FEUILLE !).

Exercice 1 *(5 points)*

Soit l'équation différentielle

$$(E)\ x.y'' + 2.y' + x.y = 0$$

avec les conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1) Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de E ainsi que leur rayon de convergence.

2) Reconnaître ces solutions.

Exercice 2 *(5 points)*

Soit la fonction impaire, 2π*-périodique telle que* $\forall x \in]0, \pi[$ *par :*

$$f(x) = x.$$

1) Tracer la courbe représentative de cette fonction sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier réels et donner le développement de Fourier correspondant de f.

3) Vers quelle fonction converge le développement de Fourier de f *? Cette convergence est-elle uniforme ? Pourquoi ?*

4) En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Développements usuels en séries entières autour de 0.

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$,
$\cosh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$,
$\sinh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$,
$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}$,
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}$,
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$,
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$,
$\arctan(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3....(2n-1)}{2.4...(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.