utbm université de technologie Belfort-Montbéliard

MT 26 — Médian Printemps 05

Lundi 25 avril 2005

Matériel autorisé: uniquement une feuille aide-mémoire A4 recto, les doigts sont permis pour les calculs.

I. Première partie (1 + 3 + 3 + 4 points)

1°) Question préliminaire :

Représenter graphiquement les échelles de comparaison des fonctions au voisinage de ∞, puis au voisinage de 0. Placer les fonctions x, 1, $\ell n\, x$, e^x, x^α ($\alpha > 0$), $\sqrt{x}$, $x\,\ell n\, x$ ainsi que leurs inverses.

Indiquer sur ces graphiques les domaines de convergence des intégrales $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ et $\int_0^a |f(x)|\,dx$, pour les fonctions continues sur [a, ∞[ou sur]0, a].

2°) Étudier la convergence des intégrales, sans en calculer la somme :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{\ell n(1-x)}dx \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin x}{\ell n(x-1)}dx \qquad I_3 = \int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x}dx$$

3°) Calculer les intégrales généralisées suivantes (ne pas en vérifier la convergence) :

$$I_1 = \int_{\ell n 3}^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{2x\,\ell n\, x}{(1+x^2)^2}dx$$

4°) Soit, pour α réel positif, les intégrales $I_\alpha = \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, $J_\alpha = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ et $K_\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$.

a) Étudier, suivant α, la convergence de I_α, puis celle de J_α. En déduire les valeurs de α telles que K_α soit convergente

b) Convergence absolue de I_α :

Soit la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$.

- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists c_n \in [n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $u_n = \frac{2}{c_n^\alpha}$, puis $\frac{2}{((n+1)\pi)^\alpha} \le u_n \le \frac{2}{(n\pi)^\alpha}$.
- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx = \sum_{k=1}^{n-1} u_k$, puis que $\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$, et les séries $\sum_{n=1}^\infty u_n$ et $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

c) En déduire les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles I_α est absolument convergente.

d) Est-il possible que K_α soit absolument convergente ?

II. Seconde partie (3 + 4 + 4 points)

1°) Étudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^{n}}\ , \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad , \quad S_3(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n^2\ 3^n} \text{ suivant } z \in \mathbb{C}$$

2°) Étudier la convergence et la convergence absolue des séries :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{n!} \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n^2+n} \qquad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

En calculer les sommes S_1 et S_2 .

3°) Calcul approché de la somme d'une série :

a) Montrer que $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est une série convergente. Si $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ (somme partielle d'ordre n), montrer que les (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites adjacentes. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{2n+1} \le S \le S_{2n} \text{ et } |R_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \le \frac{1}{n+2} .$$

Combien faut-il calculer de termes de la suite (u_n) pour avoir une valeur approchée à 0,01 près de S ?

b) Soit $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et le reste d'ordre n : $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \le R_n \le \int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$. En déduire une majoration du reste.

Combien faut-il calculer de termes pour qu'on ait une valeur approchée à 0,001 près.

Résultats pouvant être utilisés sans démonstration dans les calculs

Formule de Stirling : $n! \underset{\infty}{\approx} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ Intégrale de Gauss $\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \ge 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Rappel de MT 12 :

Second théorème de la moyenne sur un intervalle I = [a, b] :

Soit f continue sur I, et g intégrable, positive sur I. Alors $\exists c \in [a,b] \,/\, \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$

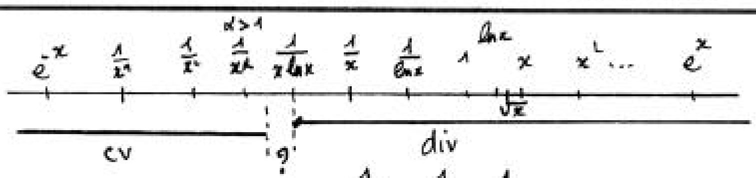
On peut tromper une partie du peuple tout le temps, et tout le peuple une partie du temps, mais on ne peut pas tromper tout le peuple tout le temps.

attribué à Abraham LINCOLN (États-Unis 1809 - 1865)

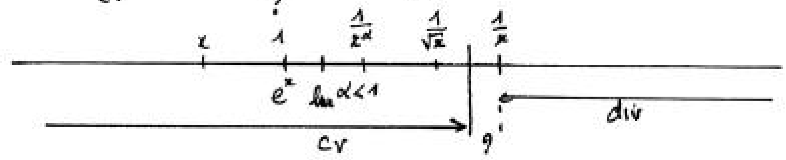
MT 26 médian 25 avril 2005 - CORRIGÉ -

PREMIÈRE PARTIE

1°) Au voisinage de $+\infty$



Au voisinage de 0



2°) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\ln(1-x)}\,dx$ $\qquad \lim\limits_{0_+} \frac{\sin x}{\ln(1-x)} = \lim\limits_{0_+} \frac{x}{-x} = -1 \Rightarrow$ prolongeable par continuité ; $\lim\limits_{1_-} \frac{\sin x}{\ln(1-x)} = 0$ — — $\Big\} \Rightarrow$ <u>I_1 converge</u>

$I_2 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{\ln(x-1)}\,dx$ $\qquad \lim\limits_{1_+} \frac{\sin x}{\ln(x-1)} = 0 \Rightarrow$ prolongement par continuité ; $x \longmapsto \frac{1}{\ln(x-1)} \searrow 0 \Rightarrow$ (Leibniz) cv $\Big\} \Rightarrow$ <u>I_2 converge</u>

$I_3 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x}\,dx$ $\qquad$ Etude en 0_+ (cv en $+\infty$) $\quad f(x) \underset{0_+}{\sim} \frac{1}{x} \Rightarrow$ div $\qquad$ <u>I_3 diverge</u>

3°) $I_1 = \displaystyle\int_{\ln 3}^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ $\qquad y = \sqrt{e^x+1} \iff x = \ln(y^2-1) \quad dx = \frac{2y}{y^2-1} \quad x_{\ln 3} \nearrow \infty \quad y_2 \nearrow \infty$

$$= \int_2^\infty \frac{2y\,dy}{y(y^2-1)} = \int_2^\infty \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \left[\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_2^\infty = \boxed{\ln 3 = I_1}$$

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{2x}{(1+x^2)^2}\ln x\,dx = \left[\frac{-\ln x}{1+x^2}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2+1)} = 0 + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}\right]_1^\infty = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2 = I_2}$$

4°) a) $I_\alpha = \displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ $\qquad \frac{1}{x^\alpha} \searrow 0$ pour $\alpha>0 \Rightarrow I_\alpha$ cv si $\alpha>0$

$J_\alpha = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ $\qquad \frac{\sin x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Rightarrow \int$ cv pour $\alpha-1<1 \Rightarrow \alpha<2$

$\Big\}$ <u>K_α cv $\iff \alpha \in]0;2[$</u>

b) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$ $\qquad$ 2e th. de la moyenne : $\exists c_n \in [n\pi,(n+1)\pi]$ / $u_n = c_n^{-\alpha}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{c_n^\alpha}$

$n\pi \le c_n \le (n+1)\pi \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha} \le \frac{1}{c_n^\alpha} \le \frac{1}{n^\alpha\pi^\alpha} \Rightarrow \frac{2}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha} \le u_n \le \frac{2}{n^\alpha\pi^\alpha}$ (Inégalité 1)

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx = \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k \Rightarrow \int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx = \sum_{n=1}^\infty u_n \Rightarrow \text{m nature}$$

D'après l'inégalité 1 $\quad \sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv $\Rightarrow \sum \frac{2}{n^\alpha\pi^\alpha}$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv
$\qquad\qquad \sum \frac{1}{n^\alpha}$ div $\qquad$ div $\qquad$ div $\Big\} \Rightarrow$ même nature.

c) Donc si $\alpha>1$ $\quad \sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv et I_α absolument convergente.
$\qquad\qquad \alpha \le 1 \qquad$ div $\qquad$ non absolument cv

d) K_α converge $\iff I_\alpha$ cv <u>et</u> J_α cv $\iff \alpha \in]0,2[$

K_α absolument convergente $\iff I_\alpha$ abs cv et J_α abs cv $\iff \begin{cases}\alpha>1\\ 0<\alpha<2\end{cases} \iff$ <u>$\alpha \in]1,+2[\iff K_\alpha$ abs cv</u>

SECONDE PARTIE

1°) $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}$ série à termes positifs $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} \Rightarrow < 1 \Rightarrow S_1$ converge (absolument)

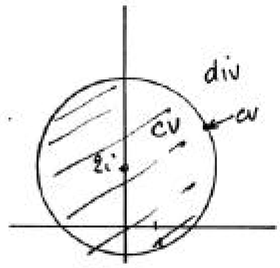
$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ " " " $\quad \sqrt[n]{v_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1-\frac{1}{n})} = e^{-1+o(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} < 1 \Rightarrow S_2$ converge absolument

$S_3 = \sum \frac{(z-2i)^n}{n^2 3^n}$ série à termes complexes. Soit $Z = z - 2i \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^n}{n^2 3^n} = \sum Z_n$

$\sqrt[n]{|Z_n|} = \frac{|Z|}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \left|\frac{Z}{3}\right|$ donc si $\left|\frac{Z}{3}\right| > 1$ S_3 diverge

$\left|\frac{Z}{3}\right| < 1$ S_3 absolument cv

$\left|\frac{Z}{3}\right| = 1 \quad |Z_n| = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ cv absolument.



Donc S_3 converge (absolument) $\iff \left|\frac{z-2i}{3}\right| \leq 1 \iff |z - 2i| \leq 3 \Rightarrow z \in \mathcal{C}(2i, R=3)$

2°) * $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ série alternée $\quad \lim_{\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 \Rightarrow$ absolument cv $\Rightarrow$ cv

$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!}(-1)^n + e^{-1} = \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)!} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} + e^{-1} = e^{-1} - e^{-1} + e^{-1} = \underline{e^{-1} = S_1}$

* $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+n} \quad n \mapsto \frac{2n+1}{n^2+n} \searrow 0 \Rightarrow S_2$ converge (th. des séries alternées) $\}$ semi-convergente

$|u_n| \sim \frac{2}{n} \Rightarrow \sum |u_n|$ diverge

$\frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} \cdots - \cancel{\frac{(-1)^n}{n}} + \frac{(-1)^n}{n+1} = -1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \Rightarrow \underline{S_2 = -1}$

* $S_3 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan\left(n\frac{\pi}{3}\right) \quad \tan n\frac{\pi}{3} = 0$ si $n = 3p$, $= \sqrt{3}$ si $n = 3p+1$ $\quad = -\sqrt{3}$ si $n = 3p+2 \quad p \in \mathbb{N}$

$= \sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{3}\left(\frac{1}{3p+1} - \frac{1}{3p+2}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{3} \frac{1}{(3p+1)(3p+2)} = \sum v_p$ avec $0 < v_p < \frac{\sqrt{3}}{9p^2} \Rightarrow \underline{S_3 \text{ converge}}$ $\}$ semi-CV

$S_3' = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \left|\tan n\frac{\pi}{3}\right| = \sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{3}\left(\frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2}\right) = \sum \omega_p$ avec $0 < \omega_p \sim \frac{2\sqrt{3}}{3p} \Rightarrow S_3$ non abs. cv

3°) Calculs approchés

a) $S_x = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

$S_{2n} - S_{2n+2} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} < 0 \Rightarrow (S_{2n}) \searrow$

$S_{2n+1} - S_{2n+3} \quad \ldots \quad > 0 \Rightarrow (S_{2n+1}) \nearrow$ $\quad \}$ (S_{2n}) et (S_{2n+1}) adjacentes

$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} < 0$ et de limite 0

On a donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergentes et de même limite S telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+1} < S < S_{2n}$

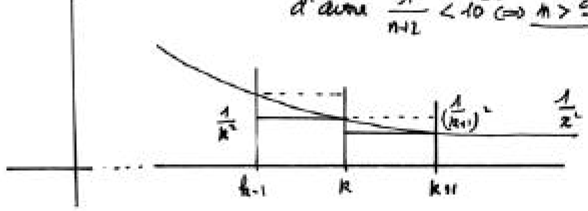
donc $|R_n| < S_{n+1} - S_n$ si n impair $\Rightarrow |R_n| < \frac{1}{n+2}$ et pour $|R_n| < 10^{-2}$ il est suffisant

ou $|R_n| < S_n - S_{n+1}$ si n pair

d'avoir $\frac{1}{n+2} < 10^{-2} \iff \underline{n > 98}$

b) $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2}$



donc $\frac{1}{n} \leq \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n-1}$

donc $|R_n| < \frac{1}{n-1}$ $\quad$ On a donc $|R_n| < 10^{-3}$ si $n \geqslant 1001$

<u>En calculant 1001 termes on a une précision de 10^{-3}</u> (et sans doute aussi avec moins !)