Matériel autorisé: uniquement une feuille aide-mémoire A4 recto, les doigts sont permis pour les calculs.

Le texte peut vous sembler un peu long, mais le barème, scandaleusement généreux, en tient compte.

I. Première partie (2 + 6 + 4 points)

1°) Étudier la convergence des intégrales suivantes, on ne demande pas de les calculer :

$$I_1 = \int_1^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) dx \quad , \quad I_2 = \int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$$

2°) Pour $n \geq 1$, on considère la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de terme général $u_n = 3^{-n}$.

a) Comment s'appelle une série comme $\sum u_n$. La condition de convergence est-elle vérifiée ?

b) Calculer la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$. En déduire la valeur de S.

c) Montrer que $\forall \alpha \in [1,+\infty[,\ \alpha^{-t} = e^{-t\ln\alpha}$. En déduire une primitive de $h(t) = \alpha^{-t}$.

d) Comparer cette série S avec une intégrale. Le résultat de a) est-il confirmé ?

e) Comparer les valeurs trouvées (exactes et approchées) pour la somme de la série et pour l'intégrale. Le résultat est-il normal ?

f) On définit, pour tout réel $x > 1$, la fonction suivante : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n - \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^t dt$. Montrer que f est strictement positive sur son domaine de définition.

3°) On considère les intégrales $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$ et $I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x-1} dx$.

a) Montrer que I et I_n sont des intégrales convergentes.

b) Montrer la relation $\forall n \in N^* \ \forall x \in [0,+1[\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

c) Soit la fonction définie par: $f(x) = \frac{x\ln x}{x-1}$ sur $]0,+1[$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Montrer que f est continue sur [0, +1], et en déduire qu'elle est bornée sur cet intervalle. En déduire $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}\ln x}{1-x} dx = 0$.

d) Montrer que : $I = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} + I_{n+1}$ puis $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$.

La minute culturelle : nous apprendrons bientôt, ne vous impatientez pas, que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

II. Deuxième partie (7 + 5 points)

1°) Soit $x \in R$ et la série définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{n} x^n$. On cherche à déterminer les valeurs de x pour lesquelles S(x) est une série convergente. L'ensemble de ces valeurs sera mis sous la forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles (ce sera le domaine de définition de la fonction S).

a) Calculer $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ ou $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$. En déduire les valeurs de x pour lesquelles on peut conclure facilement quant à la convergence et la convergence absolue.

b) On fixe maintenant $x = \dfrac{1}{4}$ on note $u_n = u_n\left(\dfrac{1}{4}\right)$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in N^*}$ telle que $v_n = \dfrac{1}{2n}$.

Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. En déduire $\forall n \in N^*\ u_n \geq v_n$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

c) Déterminer un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$. Retrouver le résultat précédent et étudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{n}\left(\dfrac{-1}{4}\right)^n$.

d) Résumé des questions précédentes : Quel est le domaine de convergence de S(x) ?

2°) Soit deux constantes réelles α et β positives ou nulles, on cherche à déterminer les couples (α, β) pour lesquels $I_{\alpha,\beta} = \int_2^{\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha \ell n^\beta x}$ et $S_{\alpha,\beta} = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha \ell n^\beta n}$ convergent.

a) Montrer que l'intégrale généralisée et la série sont de même nature (cv ou div).

b) Montrer que si $\alpha' > \alpha$ et $\beta' > \beta$ alors $I_{\alpha,\beta}$ converge $\Rightarrow I_{\alpha',\beta'}$ converge.

c) La réciproque est-elle vraie ? Si non, donner un contre exemple.

d) Montrer que $\forall\ \alpha > 1\ \ I_{\alpha,\beta}$ converge.

e) Soit $\alpha = 1$. Pour quelles valeurs de β $I_{1,\beta}$ est-elle convergente ?

f) Soit $\alpha < 1$. Montrer que $\forall \beta > 0$, $\exists V_\infty$ (voisinage de $+\infty$) / $\forall x \in V_\infty$, $\dfrac{1}{x^\alpha \ell n^\beta x} > \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$. En déduire la convergence de $I_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha < 1$.

g) Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où on porte α en abscisses et β en ordonnées. Déterminer (hachurer ou mettre en couleur sur le graphique) l'ensemble des points M(α, β) pour lesquels $I_{\alpha,\beta}$ et $S_{\alpha,\beta}$ sont convergentes.

h) Application numérique : Calculer (si le calcul est possible) $I_{1,3} = \int_2^{\infty} \dfrac{dx}{x\,\ell n^3 x}$

La deuxième minute culturelle : $I_{\alpha,\beta}$ et $S_{\alpha,\beta}$ sont appelées intégrales et séries de Bertrand.

Résultats pouvant être utilisés sans démonstration dans les calculs

Formule de Stirling : $n! \underset{\infty}{\approx} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ $\qquad \ell n\,3 = 1{,}1 \pm 0{,}1 \qquad \forall x \in R\ \ \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$

Rappel de MT 12 :

Second théorème de la moyenne sur un intervalle I = [a, b] :

Soit f continue sur I, et g intégrable, positive sur I. Alors $\exists c \in [a,b] / \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$

Il n'y a pas de vérités moyennes.

Georges BERNANOS (FRANCE 1888 - 1948)

- Médian MT26 - 27 avril 2006 - — CORRIGÉ -

PREMIÈRE PARTIE

1°) $I_1 = \int_1^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ positive et généralisée en $+\infty$ $\quad x\in V_\infty \quad 1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2x} \Rightarrow \underline{I_1 \text{ divergente}}$

$I_2 = \int_0^{\infty}\ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx$ alternée (en ∞) généralisée en 0 et $+\infty$

Etude en 0 : $\lim_{0_+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \lim_{\infty}\ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)=0 \Rightarrow$ prolongeable par continuité en 0 $\Rightarrow$ CV en 0

Etude en ∞ $\quad x\in V_\infty \quad \ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{2x} + \frac{\sin^3 x}{3x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \text{CV}+\text{div}+\text{CV}+\text{CV} = \text{div en } \infty$

2°) $n\geq 1 \quad S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \quad u_n = 3^{-n}$.

a) Série géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{3}\in\,]-1,+1[\; \Rightarrow$ série convergente.

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \underline{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = S_n}$. $\quad S = \lim_{n\to\infty}S_n = \boxed{\frac{1}{2} = S}$

c) $\forall\alpha\geq 1 \quad \alpha^{-t} = e^{\ln(\alpha^{-t})} = e^{-t\ln\alpha}$

H primitive de h : $H(t) = \int e^{-t\ln\alpha}dt = -\frac{e^{-t\ln\alpha}}{\ln\alpha} = \boxed{-\frac{\alpha^{-t}}{\ln\alpha} = H(t)}$

d) $u_n>0$, $t\mapsto\left(\frac{1}{3}\right)^t$ continue, positive, décroissante $\Big\}\Rightarrow S$ et $\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^t dt$ de même nature $\Rightarrow\Big\}$ résultat confirmé

$\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^t dt = \left[-\frac{3^{-t}}{\ln 3}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{3\ln 3}$ donc l'intégrale est convergente

e) Valeurs exactes : $S=0{,}5 \quad I=\frac{1}{3\ln 3}$, v. approchées $S=0{,}5 \quad I\simeq 0{,}30$

Résultats comparables mais différents : même nature, mais pas même somme

f) $f(x) = \frac{1}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} - \left[\frac{e^{-t\ln x}}{-\ln x}\right]_1^{\infty} = \frac{x}{x-1} - \frac{x^{-1}}{\ln x} = \frac{x\ln x - x+1}{x(x-1)\ln x} = \frac{n(x)}{>0}$ avec $n(1)=0$, $n'(x)>0 \Rightarrow n>0$

(Conclusion : il est normal que la somme de la série soit supérieure à la valeur de l'intégrale).

3°) $I = \int_0^1\frac{\ln x}{x-1}dx \quad I_n = \int_0^1\frac{x^n\ln x}{x-1}dx$

a) $\lim_{1_-}\frac{\ln x}{x-1} = 1 \Rightarrow$ prolongeable par continuité en 1 $\Rightarrow$ I CV en 1

$0<\frac{\ln x}{x-1}\underset{0}{\sim}-\ln x$ et $\int_0^{\frac{1}{2}}\ln x\,dx$ CV $\Rightarrow$ I CV en 0 $\Big\}$ $\underline{\text{I est convergente}}$

$x\in[0,1]\Rightarrow x^n\in[0,1]\Rightarrow 0\leq\frac{x^n\ln x}{x-1}\leq\frac{\ln x}{x-1}$ donc par comparaison $\underline{I_n \text{ est convergente}}$

b) $\frac{1}{1-x} - (1+x+\dots+x^n) - \frac{x^{n+1}}{1-x} = \dots = 0$ d'où l'égalité demandée

c) f continue sur $]0,1[$ et $\lim_{0_+}f = 0 = f(0)$, $\lim_{1_-}f = 1 = f(1) \Rightarrow$ $\underline{f \text{ continue sur } [0,+1]}$

f continue sur un intervalle fermé $\Rightarrow$ (th. des valeurs intermédiaires) f bornée par $m=\inf f$, $M=\sup f$

$-I_{n+1} = \int_0^1\frac{x^{n+1}\ln x}{1-x}dx = -\int_0^1 x^{n+1}\frac{\ln x}{x-1}dx$ donc $-\int_0^1 M x^{n+1}dx \leq -I_{n+1}\leq -\int_0^1 m\,x^{n+1}dx$

$-\frac{M}{n+1}\leq -I_{n+1}\leq -\frac{m}{n+1} \Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}I_{n+1} = 0}$

d) $I = -\int_0^1\frac{1}{1-x}\ln x = -\int_0^1(1+x+\dots+x^n)\ln x - \int_0^1\frac{x^{n+1}\ln x}{1-x}dx$

$= -\overset{0}{\cancel{\left[\left(x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\ln x\right]_0^1}} + \int_0^1\left(1+\frac{x}{2}+\dots+\frac{x^n}{n+1}\right)dx + I_{n+1}$

$\boxed{I = 1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2}+I_{n+1}} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc $I = \lim_{\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2}+I_{n+1}\right) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^1\frac{\ln x}{x-1}dx}$

DEUXIEME PARTIE - $\quad S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n x^n$

a) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\left|\dfrac{x^{n+1}}{x^n}\right| \times \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x| = \dfrac{4n+2}{n+1}|x| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 4|x|$

si $|x| > \frac{1}{4} \iff x \notin \left[-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right]$ lim $> 1 \to$ la série diverge

$|x| < \frac{1}{4} \iff x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ lim $< 1 \to$ la série est (absolument) convergente

} cas immédiats.

b) Pour $x = \frac{1}{4}$ on ne peut pas conclure avec a). $\quad u_n = C_{2n}^n \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $v_n = \frac{1}{2n}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{4n+2}{4(n+1)} - \dfrac{2n}{2n+2} = \dfrac{1}{2(n+1)} > 0$ donc $\underline{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 0}$

Hypothèse de récurrence : $P_n : u_n \geqslant v_n$

$u_1 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad v_1 = \frac{1}{2}$ donc P_1 vraie

$P_n \Rightarrow u_n \geqslant v_n \Rightarrow \cancel{u_n}\dfrac{u_{n+1}}{\cancel{u_n}} \geqslant \cancel{v_n}\dfrac{v_{n+1}}{\cancel{v_n}} \to u_{n+1} \geqslant v_n \Rightarrow P_{n+1}$

$\Rightarrow \underline{u_n \geqslant v_n \quad \forall n \geqslant 1}$

$\sum v_n$ diverge $\Rightarrow \underline{\sum u_n \text{ diverge}}$

c) D'après la formule de Stirling $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\cancel{2n^{2n}}\, e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(\cancel{n^n}\, \cancel{e^{-n}}\sqrt{2\pi n})^2} \times \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^n} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ div $\to \underline{\sum u_n \text{ diverge}}$

Etude de $\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n \left(\frac{1}{4}\right)^n (-1)^n$ série alternée. Si on pose $w_n = C_{2n}^n\left(\frac{1}{4}\right)^n$ on a :

$\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{4n+2}{4(n+1)} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$ donc w_n est décroissante et de limite 0 $\to \underline{\sum C_{2n}^n\left(\frac{-1}{4}\right)^n \text{ converge}}$

$(w_n = u_n)$

d) Donc : $\underline{\text{domaine de convergence de } S(x) : \left[-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right[}$

2°) $I_{\alpha\beta} = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ et $S_{\alpha\beta} = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ intégrale de fonction positive et série à termes positifs.

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ fonction } décroissante pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ continue

si $(\alpha,\beta) = (0,0)$

$\to \boxed{\begin{array}{l} I_{\alpha\beta} \text{ et } S_{\alpha\beta} \text{ de m̂ nature} \\ I_{0,0} \text{ et } S_{00} \text{ sont divergentes} \end{array}}$

b) si $\alpha' > \alpha \quad x^{\alpha'} > x^\alpha$

$\beta' > \beta \quad \ln^{\beta'} x > \ln^\beta n \quad \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x^{\alpha'} \ln^{\beta'} x} < \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta}$, par comparaison $I_{\alpha\beta}$ CV $\Rightarrow I_{\alpha'\beta'}$ converge

c) Réciproque fausse : contre exemple $\alpha' = 2 \quad \beta' = 1$ (CV) et $\alpha = 1 \quad \beta = 0$ (div)

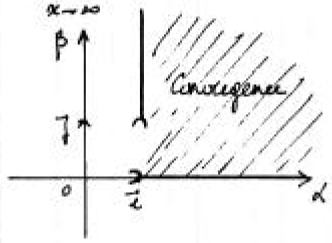
d) si $\alpha > 1 \quad 0 < \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} < \dfrac{1}{x^\alpha} \quad \forall \beta \geqslant 0$ donc $\underline{\alpha > 1 \Rightarrow I_{\alpha\beta} \text{ converge}}$

e) $\alpha = 1 \quad I_{\alpha\beta} = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{\cancel{e^t}\, dt}{\cancel{e^t}\, t^\beta} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ $\underline{\text{CV} \iff \beta > 1}$ (ch^t de variable $t = \ln x$)

f) $\alpha < 1$ $\quad$ 0 $\quad \alpha \quad \frac{1+\alpha}{2} \quad 1$ $\quad$ Pour $x \in V_\infty \quad \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}} x^{\frac{1-\alpha}{2}} \ln^\beta x}$ et $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1+\alpha}{2}} \ln^\beta x = \infty$

donc $\dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} > \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ d'intégrale divergente car $\frac{1+\alpha}{2} < 1$

g) Conclusion $I_{\alpha\beta}$ et $S_{\alpha\beta}$ convergentes $\iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou } \alpha = 1 \quad \beta > 1 \end{cases}$



h) $I_{1,3} = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{\ln 2}^{\infty} = \boxed{\frac{1}{2\ln^2 2} = I_{1,3}}$

Remarque : on aurait pu utiliser le 2^e théorème de la moyenne pour la question I-3°) c)