le 21 Novembre 2007

UTBM MT26

Médian automne 2007

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

PREMIERE PARTIE.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 5 points*

1) Peut-on construire une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *non continues qui converge uniformément vers une fonction* f *continue sur* $\mathbb{R}$ *? Si oui, donner un exemple, sinon, le démontrer.*

Réponse :
oui, par ex. $\forall x \neq 0, f_n(x) = 0,\ f_n(0) = \frac{1}{n}$.

2) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \prod_{k=0}^{n} e^{\frac{1}{2^k}}$.

Réponse :
$u_n = e^{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}} = e^{\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}}} \longrightarrow e^2$.

3) Peut-on trouver $f, g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continues telles que* $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ *et* $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ *divergent et* $\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt$ *converge ? Si oui, donner un exemple, sinon, le démontrer.*

Réponse :
oui, voir question 4)

4) L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x.\sqrt{x-1}}dx$ *converge-t-elle ?*

Réponse :
oui, $\frac{1}{x.\sqrt{x-1}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ **et** $\frac{1}{x.\sqrt{x-1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

5) $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ *est-elle convergente ? L'est-elle absolument ? Justifier votre réponse.*

Réponse :

Intégration par partie $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = [\frac{-\cos(x)}{x}]_{2\pi}^{+\infty} + \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2\pi} + \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ **clairement convergente.**

$\int_{2\pi}^{2(N+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{2(n+1)\pi} dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{2(n+1)\pi}$ **qui diverge.**

Exercice 2 - *5 points*

1) Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum \sin(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{n^3+1}), \quad S_2 = \sum \sin(\frac{(-1)^n}{n}), \quad S_3 = \sum \frac{n!}{n^n}.$$

Réponse :
S_1 : $\sin(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{n^3+1}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{n^3+1}$ donc S_1 converge.

S_2 : $\sin(\frac{(-1)^n}{n}) = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ donc la série converge d'après le critère pour les séries alternées.

S_3 : D'Alembert pour séries positives, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (\frac{n}{n+1})^n = e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} \longrightarrow e^{-1} < 1$ donc la série converge.

2) Etudier la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum \frac{1}{n^2+3n+2}.$$

Réponse :
$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ donc $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+3n+2} = 1 - \frac{1}{N+2} \longrightarrow 1.$

3) Trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^n}$ soit une approximation à 10^{-2} prés de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

Réponse :
Le critère de Cauchy montre la convergence et $\sqrt[n]{u_n} \leq \frac{1}{2}$ pour $n \geq 2$.
Donc pour $N \geq 1$ $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}$.
Donc, pour $N \geq 7$, S_N est une approximation à 10^{-2} prés de S.

TOURNER LA PAGE SVP

DEUXIEME PARTIE : NOUVELLE FEUILLE.

Exercice 3 - *5 points*

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies par* $\forall x \in [0,1], u_n(x) = x(1-x)^n$ *(convention* $0^0 = 1$*).*

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Réponse :
$\boldsymbol{u_n}$ **CS vers 0.**
$\sup|u_n(x) - 0| = \frac{1}{n+1}(1 - \frac{1}{n+1})^n \leq \frac{1}{n+1}$. **La convergence est donc uniforme.**

2) Etudier la convergence simple sur $[0,1]$ *de la série* $S = \sum u_n$. *Calculer la somme* $S(x)$ *sur le domaine de convergence. La convergence est-elle uniforme sur* $[0,1]$ *?*

Réponse :
$S(0) = 0$, $S(x) = 1$ **si** $x \in]0,1]$. **Donc convergence non uniforme car limite non continue.**

3) Calculer $\int_0^1 S(x)dx$ *et* $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 u_n(x)dx$.

Réponse :
$\int_0^1 S(x)dx = 1$, $\int_0^1 u_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ **donc** $\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 u_n(x)dx = 1 - \frac{1}{N+2} \longrightarrow 1$.

Exercice 4 - *5 points*

1. *Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f, 2π-périodique égale à x^2 pour $-\pi \leq x \leq \pi$. On représentera graphiquement f.*

   Réponse :
   paire donc $\boldsymbol{b_n = 0}$. $\boldsymbol{a_0 = \frac{\pi^2}{3}}$. $\boldsymbol{\forall n \geq 1, a_n = \frac{4.(-1)^n}{n^2}}$.

2. *Soit $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n.\cos(nx) + b_n.\sin(nx))$.*
   La convergence de cette série est-elle uniforme ?

   Réponse :
   La convergence est clairement normale donc uniforme.

3. *Puisque f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, on a vu en cours que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = S(x)$.*
   En déduire la valeur de
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

   Réponse :
   Pour $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0}$, donc $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$. Pour $\boldsymbol{x = \pi}$, $\boldsymbol{\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2}$, donc $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

RAPPEL DU COURS :

Définition 1
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, T périodique ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation).
On définit les **coefficients de Fourier réels** *de f par :*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt.$$

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ s'appelle **développement de Fourier de $\boldsymbol{f}$**.
