le 21 Novembre 2007

UTBM MT26

Médian automne 2007

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

PREMIERE PARTIE.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 5 points*

1) Peut-on construire une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non continues qui converge uniformément vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner un exemple, sinon, le démontrer.

2) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \prod_{k=0}^{n} e^{\frac{1}{2^k}}$.

3) Peut-on trouver $f, g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ divergent et $\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt$ converge ? Si oui, donner un exemple, sinon, le démontrer.

4) L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x.\sqrt{x-1}}dx$ converge-t-elle ?

5) $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est-elle convergente ? L'est-elle absolument ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 *- 5 points*

1) Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum \sin(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{n^3+1}), \quad S_2 = \sum \sin(\frac{(-1)^n}{n}), \quad S_3 = \sum \frac{n!}{n^n}.$$

2) Etudier la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum \frac{1}{n^2+3n+2}.$$

3) Trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^n}$ soit une approximation à 10^{-2} prés de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

TOURNER LA PAGE SVP

DEUXIEME PARTIE : NOUVELLE FEUILLE.

Exercice 3 - *5 points*

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies par* $\forall x \in [0,1], u_n(x) = x(1-x)^n$ *(convention* $0^0 = 1$*).*

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) Etudier la convergence simple sur $[0,1]$ *de la série* $S = \sum u_n$. *Calculer la somme* $S(x)$ *sur le domaine de convergence. La convergence est-elle uniforme sur* $[0,1]$ *?*

3) Calculer $\int_0^1 S(x)dx$ *et* $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 u_n(x)dx$.

Exercice 4 - *5 points*

1. *Calculer les coefficients de Fourier* a_n *et* b_n *de la fonction* f, 2π*-périodique égale à* x^2 *pour* $-\pi \leq x \leq \pi$. *On représentera graphiquement* f.

2. *Soit* $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n.\cos(nx) + b_n.\sin(nx))$.
La convergence de cette série est-elle uniforme ?

3. *Puisque* f *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et continue, on a vu en cours que* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = S(x)$.
En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

RAPPEL DU COURS :

Définition 1
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux,* T *périodique (*$\omega = \frac{2\pi}{T}$ *la pulsation).*
On définit les **coefficients de Fourier réels** *de* f *par :*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt.$$

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$ *s'appelle* **développement de Fourier de** $\boldsymbol{f}$.