le 2 Décembre 2008

UTBM MT26

Médian automne 2008

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

PREMIERE PARTIE.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 6 points*

1) Déterminer la véracité de l'implication suivante dans les deux cas ci-dessous :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \textit{ converge} \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n^2 \textit{ converge.}$$

Justifier la réponse.

cas 1 *:* $\forall n \geq 0, u_n \geq 0.$

Réponse :
(1 point) Vraie car $u_n \longrightarrow 0$ donc $\forall n \geq N, 1 \geq u_n \geq u_n^2 \geq 0.$

cas 2 : u_n *de signe quelconque.*

Réponse :
(1 point)Faux. Ex. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{b}}$.

Réponse :

2) L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x.\sqrt{x-1}}dx$ *est-elle convergente ?*

Réponse :
(1 point) $\frac{1}{x.\sqrt{x-1}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ et $\frac{1}{x.\sqrt{x-1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ d'où la convergence de l'intégrale.

3) Soit $u_n = \frac{1}{n!}$.

a - Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est convergente.*

Réponse :

(1 points) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 0$.

b - Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall N \geq N_1, |\sum_{n\geq N+1} u_n| \leq \frac{1}{2^N}$.

Réponse :
(1 point) $\forall n \geq 2, u_n \leq \frac{1}{2^n}$, donc $|\sum_{n\geq N+1} u_n| \leq \sum_{n\geq N+1} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}}$.

c - En déduire $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=1}^{n=N_2} \frac{1}{n!}$ soit une approximation a 10^{-3} prés de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$.

Réponse :
(1 point) Il suffit que $\frac{1}{2^N} \leq 10^{-3}$, d'où $N_2 = 10$.

Exercice 2 - *6 points*

1) Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum (1 + \frac{a}{n})^{-n^2} \ (a > 0) \qquad S_2 = \sum \frac{n^n}{n!}$$

Réponse :
(2 points)
S_1 : $((1 + \frac{a}{n})^{-n^2})^{\frac{1}{n}} = (1 + \frac{x}{n})^{-n} = e^{-n.\ln(1+\frac{x}{n})} \longrightarrow e^{-a}$ donc CV.
S_2 : $\frac{(n+1)^{n+1}.(n!)}{n^n((n+1)!)} = (1 + \frac{1}{n})^n \longrightarrow e$ donc DV.

2) Etudier la convergence simple et absolue de la série suivante :

$$S_3 = \sum (-1)^n.(\sqrt{n^2+1} - n).$$

Réponse :
(2 points) $(\sqrt{n^2+1} - n) = \frac{1}{(\sqrt{n^2+1}+n)}$. Donc S_3 CV grâce au critère des séries alternées.
$|(-1)^n.(\sqrt{n^2+1} - n)| = \frac{1}{(\sqrt{n^2+1}+n)} \sim \frac{1}{2n}$ donc DVABS.

3) Grâce aux développements limités, étudier la convergence de la série suivante :

$$S_4 = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\cos(\frac{1}{n}).$$

Réponse :
(2 points) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\cos(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.o(\frac{1}{n^3})$. Les 2 premiers termes convergent grâce au critère des séries alternées, le troisième converge absolument. D'où la convergence de la série.

TOURNER LA PAGE SVP

DEUXIEME PARTIE : NOUVELLE FEUILLE.

Exercice 3 - *5 points*

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

1. *Montrer que $f(x) = \sin(e^x)$ vérifie "$\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge" et n'admet pas de limite en $+\infty$.*

   Réponse :
   (1 point) chgt de variable $u = e^x$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ qui converge.

2. *Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, que peut-on dire de l ? Justifier la réponse.*

   Réponse :
   (2 points) Supposons $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \neq 0$ Alors il existe $A > 0$ tel que $f(x)$ de signe constant sur $[A, +\infty[$ et $f(x) \sim_{+\infty} l \neq 0$ donc non integrable en $+\infty$.

3. *Si f est décroissante, montrer que $0 \leq x.f(x) \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt \geq 0$.*
   En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x.f(x) = 0$.

   Réponse :
   (2 points) On montre facilement que f est positive sur $[0, +\infty[$.
   Puisque f décroissante, $2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt \geq (x - \frac{x}{2}).f(x)$. D'où le premier résultat.
   De plus f est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ tend vers 0 quand $a \longrightarrow +\infty$. D'où le résultat.

Exercice 4 - *5 points*

I - Une suite de fonctions :
Etudier la convergence simple et uniforme de la **suite** *de fonctions $f_n(x) = \frac{n}{n+x}$.*

Réponse :
(2 points) $f_n(x) = \frac{n}{n+x} \longrightarrow 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ non uniformément car si $d_n(x) = |\frac{n}{n+x} - 1| = \frac{x}{n+x}$ alors $d_n(n) = \frac{1}{2}$.

II - Une série de fonctions :
1) Montrer que la série $g(x) = \sum_{n\geq1} \frac{e^{-nx}}{n}$ converge simplement et uniformément sur $[1, +\infty[$.

Réponse :
(1 points) convergence normale, $\frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-n}$.

2) Peut-on déterminer explicitement la dérivée de g ? Justifier.

Réponse :

(1 point) $\sum(\frac{e^{-nx}}{n})' = \sum -e^{-nx}$ est également normalement convergente. On a donc $g'(x) = \sum -e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

3) En déduire $g(x)$ sachant que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x) = 0$.

Réponse :

(1 point) d'après 2), $g(x) = -\ln(1-e^{-x}) + k$ et $k = 0$.

RAPPEL :

$$\ln(1+X) \sim_{X\to 0} X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

$$\cos(X) \sim_{X\to 0} 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3).$$

$$\forall k \in]-1,1[, \sum_{n=N}^{+\infty} k^n = \frac{k^N}{1-k}.$$