

Médian automne 2008

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

PREMIERE PARTIE.

Exercice 1 (*Applications directes du cours*) - 6 points

1) Déterminer la véracité de l'implication suivante dans les deux cas ci-dessous :

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \implies \sum_{n \geq 0} u_n^2 \text{ converge.}$$

Justifier la réponse.

cas 1 : $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$.

cas 2 : u_n de signe quelconque.

2) L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x-1}} dx$ est-elle convergente ?

3) Soit $u_n = \frac{1}{n!}$.

a - Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

b - Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall N \geq N_1, |\sum_{n \geq N+1} u_n| \leq \frac{1}{2^N}$.

c - En déduire $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{n!}$ soit une approximation à 10^{-3} près de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$.

Exercice 2 - 6 points

1) Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum (1 + \frac{a}{n})^{-n^2} \quad (a > 0) \quad S_2 = \sum \frac{n^n}{n!}$$

2) Etudier la convergence simple et absolue de la série suivante :

$$S_3 = \sum (-1)^n \cdot (\sqrt{n^2 + 1} - n).$$

3) Grâce aux développements limités, étudier la convergence de la série suivante :

$$S_4 = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

TOURNER LA PAGE SVP

DEUXIEME PARTIE : NOUVELLE FEUILLE.

Exercice 3 - 5 points

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

1. Montrer que $f(x) = \sin(e^x)$ vérifie " $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge" et n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, que peut-on dire de l ? Justifier la réponse.
3. Si f est décroissante, montrer que $0 \leq x.f(x) \leq 2 \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt \leq 0$.
En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x.f(x) = 0$.

Exercice 4 - 5 points

I - Une suite de fonctions :

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n}{n+x}$.

II - Une série de fonctions :

- 1) Montrer que la série $g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ converge simplement et uniformément sur $[1, +\infty[$.
- 2) Peut-on déterminer explicitement la dérivée de g ? Justifier.
- 3) En déduire $g(x)$ sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

RAPPEL :

$$\ln(1+X) \sim_{X \rightarrow 0} X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

$$\cos(X) \sim_{X \rightarrow 0} 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3).$$

$$\forall k \in]-1, 1[, \sum_{n=N}^{+\infty} k^n = \frac{k^N}{1-k}.$$